

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ciencias y Humanidades

EL MODELO DE POISSON Y SU APLICACION  
AL CALCULO DEL RIESGO SISMICO DE  
GUATEMALA

MARGARITA VILLAGRAN DE CASTAÑEDA

Investigación monográfica para  
optar al grado académico de  
Licenciada en Matemáticas

Guatemala  
Enero 1980

A mis padres

A mi esposo

A mi pequeño hijo

UN PROFUNDO AGRADECIMIENTO

A la Universidad del Valle de Guatemala

A todos mis profesores, en especial al Licenciado  
Fernando Noriega C.

A la Universidad de San Carlos de Guatemala

Vo. Bo.

(f) *Noriega C.*  
Licenciado y M.S. Fernando Noriega C.  
Asesor

Tribunal:

(f) \_\_\_\_\_

(f) \_\_\_\_\_

(f) \_\_\_\_\_

Mes de aprobación: Enero de 1980.

EL MODELO DE POISSON Y SU APLICACION  
AL CALCULO DEL RIESGO SISMICO DE  
GUATEMALA

## CONTENIDO

	Página
I. INTRODUCCION	1
II. CAPITULO I Formulación Matemática del Modelo de Poisson	5
1.1 Definiciones previas	6
1.2 Deducción Matemática del Modelo de Poisson	15
1.3 Condiciones necesarias para aplicar el modelo	20
1.4 Algunos ejemplos de aplicación	27
1.5 Tablas de probabilidad de Poisson	32
III. CAPITULO II Aplicación del Modelo de Poisson a Eventos Sísmicos	33
2.1 Suposiciones bajo las cuales se aplica el Modelo de Poisson a Eventos Sísmicos	34
2.2 Terminología de sismos	37
2.2.1 Producción de sismos	37
2.2.2 Fuentes sísmicas	38
2.2.3 Ondas sísmicas	39
2.2.4 Magnitud de un sismo	40
2.2.5 Principales instrumentos de detección sísmológica	42
2.2.6 Datos sísmicos y el Modelo de Poisson	50
2.2.7 Mapas de riesgo sísmico	51

	Página
IV. CAPITULO III	55
El Riesgo Sísmico de Guatemala y el Modelo de Poisson	
3.1 Introducción	56
3.1.1 Modelo sísmico	60
3.2 Relaciones de recurrencia logarítmico-lineales	65
3.3 Mecanismos de las fuentes	79
3.3.1 Fuente puntual	79
3.3.2 Fuente de Línea	81
3.3.3 Fuente de área	86
3.4 Aceleración pico de la tierra en un sitio	88
3.4.1 Relación de atenuación de la aceleración pico de la tierra	88
3.4.2 Fuente puntual	95
3.4.3 Fuentes de línea	96
3.4.4 Fuente de área	105
3.5 Función acumulativa de distribución de la aceleración pico de la tierra	113
V. CONCLUSIONES	115
VI. BIBLIOGRAFÍA	117

## I. INTRODUCCION

Esta investigación monográfica fue motivada por el terremoto que sufriera Guatemala en la madrugada del 4 de Febrero de 1976, lo cual me permitió comprender que era mi deber aportar un granito de arena a mi bello país.

La investigación está basada fundamentalmente en el estudio de Kiremidjian, Shah y Lubetkin titulado "Seismic Hazard Mapping for Guatemala". Pretendo desarrollar en forma breve, matemática y físicamente un modelo sísmico para Guatemala ajustado a la distribución probabilística de Poisson.

Para ello, se parte de datos disponibles actualmente tales como: la magnitud de Richter asociada a cada evento sísmico, la naturaleza de la fuente sísmica, el número de eventos sísmicos de magnitud mayor que alguna propuesta y que ocurren en una fuente determinada. Luego, se efectúa un análisis de regresión sobre los datos para cada fuente para así obtener la relación de recurrencia logarítmico-lineal.

En el modelo, la sismicidad de las fuentes se describe por la probabilidad de generar un evento mayor que alguna magnitud y no por la distribución sobre todos los eventos.

Por otra parte, para estudiar matemática y físicamente el modelo sísmico, es necesario tener una base sólida de Teoría de Probabilidades, por ello se dedica la primera parte

de investigación a ese campo.

Se supone que la ocurrencia de eventos sísmicos forma un proceso de Poisson con una razón media de ocurrencia dependiente de la magnitud, para poder obtener una distribución sobre el número de ocurrencias por arriba de una magnitud observada para un período de tiempo basado en la historia sísmica de los datos registrados y para una fuente determinada. Asimismo, es necesario comprobar que los datos sísmicos verifican la suposición sobre independencia espacial y temporal de los eventos.

Combinando las distribuciones binomiales condicionadas con la distribución de ocurrencias de Poisson, se obtiene la distribución del número de ocurrencias para cada magnitud, debido a cada uno de los tipos de fuente.

Para relacionar la aceleración pico de la tierra y la magnitud como una función de la distancia, se usa la relación de Esteva (1973) y a partir de ella se puede calcular la distribución de probabilidad de que alguna aceleración pico de la tierra sea mayor que un cierto valor previamente determinado, para un período de exposición futuro en años en un sitio, debido a los tres tipos de fuentes sísmicas.

Finalmente, se ponen algunos ejemplos de aplicación de las diferentes relaciones previamente desarrolladas, con el

objeto de insistir sobre la importancia del modelo aplicado al riesgo sísmico de Guatemala.

## CAPITULO I

### Formulación Matemática del Modelo de Poisson

- 1.1 Definiciones Previas.
- 1.2 Deducción Matemática del Modelo de Poisson.
- 1.3 Condiciones Necesarias para Aplicar el Modelo.
- 1.4 Algunos ejemplos de aplicación.
- 1.5 Tablas de probabilidad de Poisson.

## 1.1 Definiciones Previas.

Def. 1.1 Un anillo booleano de conjuntos es una clase no vacía  $\mathcal{A}$  de conjuntos que es cerrada bajo uniones y diferencias.

$$E \in \mathcal{A} \wedge F \in \mathcal{A} \text{ entonces } E \cup F \in \mathcal{A} \wedge E - F \in \mathcal{A}$$

Es claro que  $\phi \in \mathcal{A}$  pues  $\phi = E - E \in \mathcal{A}$

Def. 1.2 Un álgebra booleana de conjuntos es una clase no vacía  $\mathcal{A}$  de conjuntos, tal que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{A} \text{ entonces } E \cup F \in \mathcal{A} \\ \text{(b) Si } E \in \mathcal{A} \text{ entonces } C_M E \in \mathcal{A} \end{array} \right\} \text{ cerrada bajo uniones y complementos}$$

Def. 1.3 Un  $\sigma$ -anillo es una clase no vacía  $S$  de conjuntos tal que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } E \in S, F \in S \text{ entonces } E - F \in S \\ \text{(b) } E_i \in S \forall i \in I \text{ entonces } \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in S \end{array} \right\} \text{ cerrada bajo diferencia y uniones contables}$$

Def. 1.4 Una  $\sigma$ -álgebra de conjuntos es una clase no vacía de conjuntos cerrada bajo complementos y uniones contables. Luego, una  $\sigma$ -álgebra es un  $\sigma$ -anillo que contiene a  $M$  (espacio muestral).

Def. 1.5 Una función de conjuntos  $\mu$  cuyo rango son los reales extendidos, definida sobre una clase  $S$  es finitamente aditiva si para toda clase finita, disjunta  $\{E_1, \dots, E_n\}$  de conjuntos en  $S$  cuya unión es  $S$  se tiene:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$$

Def. 1.6 Una función de conjuntos  $\mu$  cuyo rango es la recta real extendida definida sobre una clase  $S$  de conjuntos es aditiva si:

$$E \in S, F \in S \text{ E } E \cup F \in S \text{ \& } E \cap F = \phi$$

$$\text{entonces } \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$$

Def. 1.7 Una función de conjuntos  $\mu$  cuyo rango es la recta real extendida definida sobre una clase  $S$  es contablemente aditiva, si para toda sucesión disjunta  $E_n$  de conjuntos en  $S$  cuya unión está en  $S$  se tiene:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Def. 1.8 Una medida es una función de conjuntos  $\mu$  cuyo rango es la recta real extendida, no negativa y contablemente aditiva definida sobre un anillo  $\mathcal{A}$ , tal que:

$$\mu(\emptyset) = 0$$

Puesto que  $\bigcup_{i=1}^n E_i = E_1 \cup \dots \cup E_n$

una medida es siempre finitamente aditiva.

Def. 1.9 Un espacio medible es un conjunto  $M$  (espacio muestral) y un  $\sigma$ -anillo  $S$  de subconjuntos de  $M$  tal que  $US=M$ . Denotaremos el espacio medible simplemente por  $M$ .

Def. 1.10 Un espacio de medida es un espacio medible  $(M,S)$  y una medida  $\mu$  sobre  $S$  y  $\mathcal{P}$  denota  $(M,S,\mu)$ .

Def. 1.11 Una sucesión de eventos  $E_i$  es independiente si:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) = \prod_{i=1}^n P(E_i)$$

Este es el enfoque utilizado por Paul Halmos (1950) quien finalmente afirma que la probabilidad numérica es una medida  $\mu$  sobre una  $\sigma$ -álgebra booleana  $S$

de subconjuntos de  $M$  donde  $\mu(M)=1$  es decir que es una función:

$$P: \mathcal{P}(M) \longrightarrow [0,1]$$

"   
  $2^M$

en donde  $\mathcal{P}(M)$  es una  $\sigma$ -álgebra  $S$  y representa el conjunto potencia de  $M$ . Esta función está sujeta a los siguientes axiomas:

- (1) Si  $A \in \mathcal{P}(M)$  es un evento, entonces  $0 \leq P(A) \leq 1$
- (2)  $P(\phi) = 0$
- (3)  $P(M) = 1$
- (4) Si  $E_1, E_2, \dots, E_n$  es una sucesión de eventos independientes (mutuamente exclusivos) es decir que cumple con la definición 1.11 entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

Los axiomas son una consecuencia de la definición de una medida que para este caso es la probabilidad numérica.

#### Def. 1.12 Variable Aleatoria

Dado un espacio de probabilidad  $(M, S, P)$  se llama

variable aleatoria  $X$  a una función cuyo dominio es el espacio de medida  $M$  y cuyo rango es  $R$ .

$$X: M \longrightarrow R \quad X(x) = y \in R \quad \forall x \in R \exists P[X \in x] \\ (X)^{-1}(y) \in \mathcal{B} \text{ (Borel)}$$

La variable aleatoria es una magnitud numérica cuyos valores se determinan al azar. Es una función ligada a algún experimento; una vez realizado éste, conocemos el valor de la función. La variable aleatoria puede ser discreta o continua. *de acuerdo a su distribución  $F_X(x)$  si es discreta o continua.*

Def. 1.13 Si  $X$  es una variable aleatoria llamaremos función de distribución a: *la probabilidad de algún evento*

$$F_X(x) = P[X \leq x] \quad \forall x \in R, [X \leq x] \in \mathcal{S} \text{ (}\sigma\text{-álgebra)}$$

Def. 1.14 Distribución Discreta:

Una función de distribución es discreta si el rango de la variable aleatoria  $X$  es finito o numerable. El modelo de Poisson es un ejemplo de una distribución discreta. Además es una distribución contablemente infinita. es decir que:

$$F_X(x) = \sum_n P[X=x_n]$$

Def. 1.15 Asociada a una variable aleatoria discreta o a su correspondiente distribución discreta existe una función de densidad discreta que se representa por

$$f_X(x) \ni f: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$f_X(x) = \begin{cases} P[X=x_n] & \forall x=x_n \\ 0 & \forall x \neq x_n \end{cases}$$

y  $\sum_n f_X(x_n) = 1$  es la distribución de probabilidad.

A la función  $f_X(x)$  se le llama función de densidad de la variable aleatoria  $X$ , o función de densidad de la función de distribución  $F_X(x)$ .

Función de distribución de varias variables.

Consideraremos además, las funciones de distribución de dos variables; ésto es, las funciones de distribución de dos variables aleatorias.

Def. 1.16 Si  $X$  e  $Y$  son dos variables aleatorias, la función de distribución de su conjunto muestral o de distribución bivariable se indicará por  $F_{X,Y}(x,y)$  y se define como:

$$F_{X,Y}(x,y) = P[X \leq x] [Y \leq y]$$

**Def. 1.17 Variable Aleatoria Contínua.**

Una variable aleatoria es contínua cuando el espacio muestral de la variable aleatoria se define como un intervalo de números reales ó como la unión de tales intervalos.

**Def. 1.18 Función de densidad de Probabilidad.**

Si  $X$  es una variable aleatoria contínua decimos que una función  $f$  es la función de densidad de probabilidad para  $X$  si  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $P(a \leq X \leq b)$  está dada por el área bajo la curva  $y=f(x)$  sobre el intervalo de  $a$  hasta  $b$ . El dominio de la función de densidad de probabilidad es  $\mathbb{R}$ . Es decir que:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

*está determinada por la función de densidad*

con la restricción de que  $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$  *la función  $y=f(x)$  es contínua*

$$y \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

*es la función de distribución de probabilidad*

o sea que el área total bajo la gráfica es 1.

**Def. 1.19 Distribución Contínua.**

Se dice que una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución contínua cuando existe una función

*(a < X < b) es un evento en S*

$f_X(x)$  tal que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Def. 1.20 Densidad de las funciones de variables aleatorias. Consideremos  $n$  variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  que tienen una distribución continua.

$$P[(x_1, \dots, x_n) \in S] = \int_S \dots \int_S f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

en el supuesto de que la integral exista.

Def. 1.21 Se llama sucesión de  $n$  ensayos de Bernoulli al experimento que consiste en realizar  $n$  pruebas que satisfacen las siguientes condiciones:

- (a) Son posibles dos eventos que designaremos por  $E$  y  $F$ , éxito y fracaso respectivamente; y el resultado de cada prueba es uno de estos eventos.
- (b) El resultado de cada prueba es independiente de los resultados de las pruebas anteriores.
- (c) La probabilidad de que ocurra un evento  $E$  es invariante; es decir, no cambia de una prueba a otra. La probabilidad de que ocurra un even

to E se conserva a lo largo de n ensayos.

Es usual denotar la probabilidad de éxito y fracaso por p y q respectivamente por lo que de acuerdo al axioma 3:  $p+q=1$ .

El ejemplo más simple de un ensayo de Bernoulli es de lanzar una moneda; la probabilidad de éxito es igual a la probabilidad de fracaso lo que significa:

$$p=q=\frac{1}{2}$$

que está de acuerdo al axioma (1) previamente establecido.

Def. 1.22 Supongamos que se tiene una colección de n objetos. Una combinación de estos n objetos tomando r a la vez es un subconjunto de r elementos, donde el orden no importa.

El número de combinaciones de n objetos tomados r a la vez que se denota por el símbolo  $\binom{n}{r}$  puede calcularse por medio de:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

## 1.2 Deducción Matemática del Modelo de Poisson.

En muchas aplicaciones probabilísticas se confrontan ensayos de Bernoulli donde comparativamente el número de ensayos o pruebas "n" es grande y la probabilidad de ocurrencia p es pequeña en tanto que el producto  $\lambda=np$  es de magnitud moderada.

En tales casos, es conveniente usar la aproximación de Poisson a la distribución binomial, que se desarrolla a continuación.

La distribución exige que bajo ciertas circunstancias, el número de éxitos en n ensayos independientes repetidos de Bernoulli con probabilidad de éxito p en cada ensayo, obedece a una ley de probabilidad con parámetro  $\lambda=np$ .

En efecto, consideremos una sucesión de Bernoulli en la que la probabilidad del evento E (éxito) en cada prueba es p;  $0 \leq p \leq 1$  de acuerdo al axioma (1) de probabilidad, realizándose n pruebas.

Se define una variable aleatoria X sobre  $\Omega = \{S_n / S_n \text{ evento éxito}\}$  tal que:

$$\sum_{k=0}^n [X=k] = S_n$$

Por la Def. 1.22 en  $n$  pruebas hay  $\binom{n}{k}$  maneras de elegir  $k$  pruebas en las cuales ocurra  $E$ . Además la probabilidad del evento  $F$  (fracaso) es  $q=1-p$ .

Hay  $\binom{n}{k}$  eventos en  $[X=k]$  y cada uno de ellos tiene probabilidad  $p^k(1-p)^{n-k}$ . Puesto que  $p$  ocurre " $k$ " veces luego  $(1-p)$  solo puede ocurrir " $n-k$ " veces.

Entonces la función de densidad para  $x$  es:

$$f_X(x) = P[X=x] = \binom{n}{x} p^x (q)^{n-x} (1-1)$$

A este conjunto de probabilidades es al que nos referimos cuando hablamos de la distribución binomial de probabilidades.

En particular, la probabilidad de ningún éxito en  $n$  ensayos es  $q^n$  y la probabilidad de al menos un éxito es  $1-q^n=p^n$ .

Trataremos a  $p$  como una constante y denotaremos por  $S_n$  el número de éxitos en  $n$  ensayos, entonces:

$$P[S_n=k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

o bien  $b(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$  que es la notación usada por Feller (1957).

En la terminología de probabilidades  $S_n$  es una variable aleatoria y la función (1-1) es la distribución de esta variable aleatoria a la cual se le llama distribución binomial.

Ahora se muestra que el número de éxitos en  $n$  ensayos independientes repetidos de Bernoulli, con probabilidad de éxito  $p$  en cada ensayo obedece aproximadamente a la ley de probabilidad de Poisson con parámetro  $\lambda=np$ .

$$k=0 \Rightarrow b(0;n,p) = (1-p)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

tomando el log natural de ambos miembros de la igualdad:

$$\ln b(0;n,p) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$$

pero, la expansión de Taylor de log natural es

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\text{entonces } \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = -\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{2n^2} - \frac{\lambda^3}{3n^3} - \dots$$

por lo tanto si  $n$  es grande:

$$\ln b(0;n,p) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda^3}{3n^2} \approx -\lambda$$

despreciando los términos de grado  $\geq 2$  entonces:

$$b(0;n,p) \approx e^{-\lambda}$$

Además si  $p$  es muy pequeño y  $q \approx 1$  tenemos:

$$\frac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = \frac{\lambda - (k-1)p}{kq} \approx \frac{\lambda}{k}$$

$$\text{Es decir que } b(k;n,p) \approx \frac{\lambda}{k} b(k-1;n,p)$$

utilizando  $b(0;n,p) \approx e^{-\lambda}$  por rel. recursiva obtenemos que

$$b(1;n,p) \approx \lambda e^{-\lambda}$$

$$b(2;n,p) \approx \frac{1}{2} \lambda^2 e^{-\lambda}$$

y luego por inducción para  $k$

$$b(k;n,p) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p(k;\lambda) \quad (1-2)$$

Esta es la aproximación de Poisson a la distribución binomial cuando  $n$  es suficientemente grande y  $p$  es muy pequeña.

La distribución de Poisson (1-2) es una distribución de probabilidad. Por definición,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k;\lambda) = 1$$

que puede probarse de la siguiente manera:

$e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$  es el desarrollo en serie de Taylor de  $e^\lambda$   
puesto que  $e^\lambda$  es analítica

$$\text{Entonces: } \sum_{k=0}^{\infty} p(k, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^\lambda = 1$$

### 1.3 Condiciones Necesarias para Aplicar el Modelo.

#### 1.3.1 Hipótesis bajo las cuales se aplica Poisson.

La distribución de Poisson se deduce entonces como una aproximación de la distribución binomial, cuando la probabilidad de que ocurra un evento es muy pequeña y el número de pruebas  $n$  es muy grande. En este caso, la distribución binomial es aproximadamente la ley de Poisson de parámetro  $\lambda=np$  el cual ya mencioné tiene una magnitud moderada.

Según Feller (1957), la aproximación de Poisson se aplica cuando la distribución binomial de probabilidades está muy lejos de tener la forma de campana, es decir cuando  $p \leq 0.1$

Puede ocurrir que  $p$  sea muy pequeña en cuyo caso se usa la aproximación de Poisson; pero si  $n$  es "demasiado" grande y si se cumple:

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-1/2 y^2}}{\frac{x-np-1/2}{\sqrt{npq}}} dy$$

entonces la distribución binomial es igual a la distribución normal en cuyo caso es mejor utilizar la aproximación normal.

Esto quiere decir, que para valores muy grandes de  $\lambda=np$  la ley de Poisson y la ley normal se aproximan. Además Feller (1957), indica varios ejemplos de experimentos y observaciones que conducen a la interpretación de (1-2) que se trata en la próxima sección.

Según Parzen (1960) los tipos de eventos aleatorios que conducen a aplicar la ley de probabilidad pueden ser comprendidos al considerar los tipos de eventos que conducen a aplicar la ley binomial.

La situación en la cual se aplica la ley binomial es aquella en la cual se observan  $n$  ocurrencias independientes de algún experimento. Entonces se puede determinar: (1) el número de ensayos en los cuales ocurrió cierto evento y (2) el número de ensayos en los cuales el evento no ocurrió. Hay eventos aleatorios, sin embargo, que no ocurren como resultados de los ensayos de un experimento pero sí como puntos al azar en el tiempo y en el espacio, tales como los sismos. Para tales eventos se puede contar el número de ocurrencias del evento en un período de tiempo (o espacio). Sin embargo, en este caso no tiene sentido hablar del número de no ocurrencias de tal evento en un período de tiempo (o espacio).

Por ejemplo, se considera una sucesión de eventos aleatorios que ocurren en el tiempo, tales como desintegración radiactiva, el número de organismos en una unidad de volumen de algún fluido, el número de aviones que arriban a un aeropuerto en una hora ó número de llamadas que entran en una central telefónica por hora. Cada evento está representado por algún punto en el eje tiempo y lo que nos interesa es la distribución de esos puntos ó eventos.

Las suposiciones físicas más simples conducen a que  $p(k, \lambda)$  es la probabilidad de encontrar  $k$  puntos dentro de un intervalo fijo de una longitud específica. Esto será importante para la aplicación que desarrollaré en este trabajo. Las suposiciones físicas pueden expresarse así:

- 1) Las condiciones del experimento permanecen constantes en el tiempo.
- 2) Los intervalos de tiempo, no se entrelazan entre sí y son independientes en el sentido de que la información relacionada con el número de eventos en un intervalo, no revela nada sobre el otro.

Si imaginamos un intervalo de unidad de tiempo fraccionado

en  $n$  subintervalos de longitud  $1/n$ ; una colección finita de puntos en el intervalo puede tomarse como el resultado de un proceso aleatorio en el cual cada subintervalo tiene la misma probabilidad  $p_n$  de contener uno o más puntos de la colección.

Un subintervalo puede estar ocupado o ser vacío; y la independencia que se asumió de los intervalos no entrelazados implica que estamos tratando con ensayos de Bernoulli. Se asume que la probabilidad de que exactamente  $k$  subintervalos estén ocupados está dada por  $p(k, \lambda_n)$  con  $\lambda_n = np_n$ . La probabilidad de que el intervalo completo no contenga ningún punto de la colección tiende a un límite finito. Pero este es el evento que ningún subintervalo sea ocupado y su probabilidad es  $q_n = (1 - p_n)^n$ .

Aplicando logaritmos se ve que esta cantidad aproxima el límite si  $np_n$  lo hace. Entonces, se requiere que exista un número  $\lambda$  tal que  $np_n \rightarrow \lambda$  o sea  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ . En este caso, la probabilidad de que exactamente  $k$  subintervalos estén ocupados tiende a  $p(k, \lambda)$ .

Hay aplicaciones en las que es necesario reemplazar el intervalo de unidad de tiempo por un intervalo de longitud  $t$ . Si

lo dividimos en subintervalos de longitud  $1/n$  entonces las probabilidades  $p_n$  no cambian, pero el número de subintervalos está dado por el entero más próximo a  $nt$ .

Esto nos lleva a considerar:

$$P(k, \lambda t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (1-3)$$

Como la probabilidad de encontrar exactamente  $k$  puntos en un intervalo fijo de longitud  $t$ . La probabilidad de ningún punto en un intervalo de longitud  $t$  es:

$$P(0, \lambda t) = e^{-\lambda t} \quad (1-4)$$

y la probabilidad de encontrar al menos un punto es  $1 - e^{-\lambda t}$ .

El parámetro  $\lambda$  es una constante física que determina la densidad de puntos del eje  $t$ . Cuanto más grande es  $\lambda$  más pequeña es la probabilidad de encontrar algún punto.

### 1.3.2 Distribuciones Espaciales:

Hemos considerado la distribución de eventos aleatorios o sean puntos a lo largo del eje  $t$ ; pero el mismo argumento es

aplicable a la distribución de puntos en el plano o en el espacio.

En lugar de intervalos de longitud, se tienen dominios de área o volumen  $t$ , y la suposición fundamental es que la probabilidad de encontrar  $k$  puntos en un dominio específico depende solo del área o del volumen del dominio pero en absoluto de la forma.

Por lo demás, se consideran las mismas suposiciones anteriores.

- (1) Si  $t$  es pequeño, la probabilidad de encontrar más de un punto en un dominio de volumen  $t$  es pequeña comparada con  $t$ .
- (2) Los dominios no se entrelazan y son mutuamente independientes.

Para encontrar la probabilidad de que un dominio de volumen  $t$  contenga exactamente  $k$  puntos al azar, subdividimos en  $n$  subdominios y aproximamos la probabilidad requerida por la probabilidad de  $k$  éxitos en  $n$  ensayos.

Esto significa que se desprecia la probabilidad de encontrar más de un punto en el mismo subdominio pero la suposición (1) implica que el error tiende a cero conforme  $n \rightarrow \infty$ . En el límite obtenemos de nuevo la distribución de Poisson.

#### 1.4 Algunos Ejemplos de Aplicación.

Las estrellas en el espacio, las nueces en un pastel, el flujo en materiales, cuevas de animales en el campo, número de llamadas telefónicas por minuto en una central telefónica, número de átomos que decaen por millonésimo de segundo en un compuesto radio activo, el número de accidentes por semana en una gran fábrica, etc, son variables aleatorias que están distribuidas aproximadamente según la distribución de Poisson. Es común en todas ellas, que el número de eventos es grande y la probabilidad de ocurrencia de algún evento en un intervalo de tiempo es pequeña.

##### Ejemplo 1)

Se sabe que la probabilidad de que un artículo producido por cierta máquina sea defectuoso es 0.1. Encontrar la probabilidad de que de una muestra de 10 artículos, seleccionada al azar de la producción, contenga a lo sumo un artículo defectuoso.

Solución:

La probabilidad requerida usando la ley binomial es: según la relación (1-1)

$$\begin{aligned}
 P[X \leq 1] &= \binom{10}{0} (0.1)^0 (0.9)^{10} + \binom{10}{1} (0.1)^1 (0.9)^9 \\
 &= 0.7361 = 73.6\%
 \end{aligned}$$

donde  $X$  representa la variable aleatoria artículo defectuoso.

La probabilidad requerida usando la aproximación de Poisson

$$\begin{aligned}
 P[X \leq 1] &= \sum_{k=0}^1 e^{-np} \frac{(np)^k}{k!} \\
 &= e^{-10(0.1)} + e^{-10(0.1)} \frac{(10 \times 0.1)}{1} \\
 &= e^{-1} + e^{-1} \\
 &= 0.7358 \approx 73.6\%
 \end{aligned}$$

Con este resultado se comprueba que la ley de Poisson es aproximable a la ley binomial.

Ejemplo 2) Prueba de Seguridad para una Vacuna.

En cierta etapa de la producción de cierta vacuna, ésta contiene un promedio de  $m$  virus vivos por  $\text{cm}^3$ . Se asume que en un recipiente que contiene  $V \text{ cm}^3$  de vacuna hay  $n=mV$  virus. Se extrae una muestra  $S$  de vacuna del recipiente con un volu

men de  $v$  cm<sup>3</sup>. Encontrar la probabilidad para  $k=0,1,\dots,n$ , de que la muestra contenga  $k$  virus.

Solución:

Sea  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  la localización de los  $n$  virus en el recipiente.

$$z_j = \begin{cases} s & \text{si } j \in S \\ f & \text{si } j \notin S \end{cases}$$

La probabilidad  $p$  de que un virus del recipiente estuviera en la muestra es:

$$p = \frac{v}{V} \quad \begin{array}{l} \text{la razón del volumen de la muestra al} \\ \text{volumen del recipiente.} \end{array}$$

Se asume que los virus están uniformemente dispersos en el recipiente. Si además, se asume que los virus están independientemente dispersos en el recipiente se sigue de la ley binomial.

$$P[X=k] = \binom{mV}{k} \left(\frac{v}{V}\right)^k \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{mV-k}$$

Si se asume que la muestra tiene un volumen menor que 1% del volumen  $V$  del recipiente, entonces por la aproximación de Poisson a la ley binomial:

$$P[X=k] = e^{-mV} \frac{(mV)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n e^{-mV} \frac{(mV)^k}{k!}$$

Supongamos que el recipiente de vacuna contiene 5 virus por cada 100 cm<sup>3</sup>. Entonces  $m=0.005$ . Además se extrae una muestra de 600 cm<sup>3</sup> de volumen y se busca encontrar la probabilidad de que la muestra no contenga ningún virus. Entonces:

$$P[X=0] = e^{-mV} = e^{-(0.005)(600)} = e^{-3} = 0.0498 = 5.0\%$$

o bien, la probabilidad de que la muestra contenga algún virus:

$$\begin{aligned} P[\text{algún virus}] &= 1 - P[\text{ningún virus}] \\ &= 1 - 0.0498 \\ &= 0.9502 = 95.02\% \end{aligned}$$

Este ejemplo es de gran importancia en el diseño de un mecanismo de chequeo para la confiabilidad de una vacuna, pues si la muestra no contiene virus se puede asumir que el recipiente que representa la población del cual se extrajo una muestra está libre de virus.

Si se desea producir vacuna libre de virus, se debe diseñar un proceso de producción tal que la densidad "m" de virus en la vacuna sea 0.

Para chequearlo, extraemos una muestra de la vacuna producida. El cálculo efectuado dió como resultado una probabilidad muy pequeña  $<0.1$  por lo cual el modelo de Poisson se adecúa.

TABLA I

## Probabilidades de Poisson

La tabla muestra  $e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$  para valores  $\lambda$  en el intervalo de 0.1, para valores de  $\lambda$  en el intervalo de 2.0 a 4.0 en incrementos de 0.2 y para valores de  $\lambda$  en el intervalo de 4 a 10 en incrementos de 1.

En la columna de la izquierda aparecen los valores de  $\lambda$  de 0.1 a 10 y en la fila superior los valores de  $n$  desde 0 hasta 12.

En la parte inferior de la página continúa la tabla para valores de  $n$  desde 13 hasta 24 y para valores de  $\lambda$  de 5 a 10.

$\lambda^x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.1	.9048	.0905	.0045	.0002	.0000								
.2	.8187	.1637	.0164	.0011	.0001	.0000							
.3	.7408	.2222	.0333	.0033	.0002	.0000							
.4	.6703	.2681	.0536	.0072	.0007	.0001	.0000						
.5	.6065	.3033	.0758	.0126	.0016	.0002	.0000						
.6	.5488	.3293	.0988	.0198	.0030	.0004	.0000						
.7	.4956	.3476	.1217	.0284	.0050	.0007	.0001	.0000					
.8	.4493	.3595	.1438	.0383	.0077	.0012	.0002	.0000					
.9	.4056	.3659	.1647	.0494	.0111	.0020	.0003	.0000					
1.0	.3579	.3679	.1839	.0613	.0153	.0031	.0005	.0001	.0000				
1.1	.3329	.3552	.2014	.0738	.0203	.0045	.0008	.0001	.0000				
1.2	.3012	.3614	.2169	.0867	.0260	.0062	.0012	.0002	.0000				
1.3	.2725	.3543	.2303	.0998	.0324	.0084	.0018	.0003	.0001	.0000			
1.4	.2456	.3452	.2417	.1128	.0395	.0111	.0026	.0005	.0001	.0000			
1.5	.2231	.3347	.2510	.1255	.0471	.0141	.0035	.0008	.0001	.0000			
1.6	.2019	.3230	.2584	.1378	.0551	.0176	.0047	.0011	.0002	.0000			
1.7	.1827	.3106	.2640	.1496	.0636	.0216	.0061	.0015	.0003	.0001	.0000		
1.8	.1553	.2975	.2678	.1507	.0723	.0260	.0078	.0020	.0005	.0001	.0000		
1.9	.1495	.2842	.2700	.1710	.0812	.0309	.0098	.0027	.0006	.0001	.0000		
2.0	.1353	.2707	.2707	.1804	.0902	.0351	.0120	.0034	.0009	.0002	.0000		
2.2	.1108	.2438	.2681	.1966	.1082	.0476	.0174	.0055	.0015	.0004	.0001	.0000	
2.4	.0907	.2177	.2613	.2090	.1254	.0602	.0241	.0083	.0025	.0007	.0002	.0000	
2.6	.0743	.1931	.2510	.2176	.1414	.0735	.0319	.0118	.0038	.0011	.0003	.0001	.0000
2.8	.0608	.1703	.2384	.2225	.1557	.0872	.0407	.0163	.0057	.0018	.0005	.0001	.0000
3.0	.0498	.1494	.2240	.2240	.1680	.1008	.0504	.0216	.0081	.0027	.0008	.0002	.0001
3.2	.0408	.1304	.2087	.2226	.1781	.1140	.0608	.0278	.0111	.0040	.0013	.0004	.0001
3.4	.0334	.1135	.1929	.2186	.1858	.1264	.0716	.0348	.0148	.0056	.0019	.0006	.0002
3.6	.0273	.0984	.1771	.2125	.1912	.1377	.0826	.0425	.0191	.0076	.0028	.0009	.0003
3.8	.0224	.0850	.1615	.2046	.1944	.1477	.0936	.0508	.0241	.0102	.0039	.0013	.0004
4.0	.0183	.0733	.1465	.1954	.1954	.1563	.1042	.0595	.0298	.0132	.0053	.0019	.0006
5.0	.0067	.0337	.0842	.1404	.1755	.1755	.1462	.1044	.0653	.0363	.0181	.0082	.0034
6.0	.0025	.0149	.0446	.0892	.1339	.1606	.1606	.1377	.1033	.0688	.0413	.0225	.0113
7.0	.0009	.0064	.0223	.0521	.0912	.1277	.1490	.1490	.1304	.1014	.0710	.0452	.0264
8.0	.0003	.0027	.0107	.0286	.0573	.0916	.1221	.1396	.1396	.1241	.0993	.0722	.0481
9.0	.0001	.0011	.0050	.0150	.0337	.0507	.0911	.1171	.1318	.1318	.1186	.0970	.0728
10.0	.0000	.0005	.0023	.0076	.0189	.0378	.0631	.0901	.1126	.1251	.1251	.1137	.0948
$\lambda^x$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
5.0	.0013	.0005	.0002										
6.0	.0052	.0022	.0009	.0003	.0001								
7.0	.0142	.0071	.0033	.0014	.0006	.0002	.0001						
8.0	.0295	.0159	.0090	.0045	.0021	.0009	.0004	.0002	.0001				
9.0	.0504	.0324	.0194	.0109	.0058	.0029	.0014	.0006	.0003	.0001			
10.0	.0729	.0521	.0347	.0217	.0128	.0071	.0037	.0019	.0009	.0004	.0002	.0001	

CAPITULO II  
APLICACION DEL MODELO DE POISSON  
A EVENTOS SISMICOS

- 2.1 Suposiciones bajo las cuales se aplica el Modelo de Poisson a eventos sísmicos.
- 2.2 Terminología de sismos
  - 2.2.1 Producción de sismos
  - 2.2.2 Fuentes sísmicas
  - 2.2.3 Ondas sísmicas
  - 2.2.4 Magnitud de un sismo
  - 2.2.5 Principales instrumentos de detección sismológica
  - 2.2.6 Datos sísmicos y el Modelo de Poisson
  - 2.2.7 Mapas de riesgo sísmico.

## 2.1 Suposiciones bajo las cuales se aplica el Modelo de Poisson a eventos sísmicos.

La ocurrencia de eventos sísmicos se adecúa al modelo de Poisson puesto que: dado que ocurran un gran número de sismos, si se escoge la variable aleatoria número de sismos por arriba de la magnitud  $M$  (magnitud hipotética) y se le considera como el evento éxito; entonces, la probabilidad de que ocurra un sismo de magnitud mayor que  $M$  en un sitio determinado es muy pequeña. Además, para los eventos sísmicos que se adecúan al modelo de Poisson, deben ser válidas las siguientes suposiciones según Kiremidjian, Shah y L. (1977).

- (a) Los sismos o terremotos son espacialmente independientes.
- (b) Los sismos o terremotos son temporalmente independientes.
- (c) La probabilidad de que dos eventos sísmicos ocurran en el mismo lugar y en el mismo instante de tiempo tiende a cero.

La primera suposición implica que la ocurrencia o no ocurrencia de <sup>un</sup> evento sísmico en un sitio no afecta a la ocurrencia o no ocurrencia de otro evento sísmico en algún otro sitio.