

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ciencias y Humanidades

EL MODELO DE POISSON Y SU APLICACION  
AL CALCULO DEL RIESGO SISMICO DE  
GUATEMALA

MARGARITA VILLAGRAN DE CASTAÑEDA

Investigación monográfica para  
optar al grado académico de  
Licenciada en Matemáticas

Guatemala  
Enero 1980

A mis padres

A mi esposo

A mi pequeño hijo

UN PROFUNDO AGRADECIMIENTO

A la Universidad del Valle de Guatemala

A todos mis profesores, en especial al Licenciado  
Fernando Noriega C.

A la Universidad de San Carlos de Guatemala

Vo. Bo.

(f) *Noriega C.*  
Licenciado y M.S. Fernando Noriega C.  
Asesor

Tribunal:

(f) \_\_\_\_\_

(f) \_\_\_\_\_

(f) \_\_\_\_\_

Mes de aprobación: Enero de 1980.

EL MODELO DE POISSON Y SU APLICACION  
AL CALCULO DEL RIESGO SISMICO DE  
GUATEMALA

## CONTENIDO

	Página
I. INTRODUCCION	1
II. CAPITULO I Formulación Matemática del Modelo de Poisson	5
1.1 Definiciones previas	6
1.2 Deducción Matemática del Modelo de Poisson	15
1.3 Condiciones necesarias para aplicar el modelo	20
1.4 Algunos ejemplos de aplicación	27
1.5 Tablas de probabilidad de Poisson	32
III. CAPITULO II Aplicación del Modelo de Poisson a Eventos Sísmicos	33
2.1 Suposiciones bajo las cuales se aplica el Modelo de Poisson a Eventos Sísmicos	34
2.2 Terminología de sismos	37
2.2.1 Producción de sismos	37
2.2.2 Fuentes sísmicas	38
2.2.3 Ondas sísmicas	39
2.2.4 Magnitud de un sismo	40
2.2.5 Principales instrumentos de detección sísmológica	42
2.2.6 Datos sísmicos y el Modelo de Poisson	50
2.2.7 Mapas de riesgo sísmico	51

	Página
IV. CAPITULO III	55
El Riesgo Sísmico de Guatemala y el Modelo de Poisson	
3.1 Introducción	56
3.1.1 Modelo sísmico	60
3.2 Relaciones de recurrencia logarítmico-lineales	65
3.3 Mecanismos de las fuentes	79
3.3.1 Fuente puntual	79
3.3.2 Fuente de Línea	81
3.3.3 Fuente de área	86
3.4 Aceleración pico de la tierra en un sitio	88
3.4.1 Relación de atenuación de la aceleración pico de la tierra	88
3.4.2 Fuente puntual	95
3.4.3 Fuentes de línea	96
3.4.4 Fuente de área	105
3.5 Función acumulativa de distribución de la aceleración pico de la tierra	113
V. CONCLUSIONES	115
VI. BIBLIOGRAFÍA	117

## I. INTRODUCCION

Esta investigación monográfica fue motivada por el terremoto que sufriera Guatemala en la madrugada del 4 de Febrero de 1976, lo cual me permitió comprender que era mi deber aportar un granito de arena a mi bello país.

La investigación está basada fundamentalmente en el estudio de Kiremidjian, Shah y Lubetkin titulado "Seismic Hazard Mapping for Guatemala". Pretendo desarrollar en forma breve, matemática y físicamente un modelo sísmico para Guatemala ajustado a la distribución probabilística de Poisson.

Para ello, se parte de datos disponibles actualmente tales como: la magnitud de Richter asociada a cada evento sísmico, la naturaleza de la fuente sísmica, el número de eventos sísmicos de magnitud mayor que alguna propuesta y que ocurren en una fuente determinada. Luego, se efectúa un análisis de regresión sobre los datos para cada fuente para así obtener la relación de recurrencia logarítmico-lineal.

En el modelo, la sismicidad de las fuentes se describe por la probabilidad de generar un evento mayor que alguna magnitud y no por la distribución sobre todos los eventos.

Por otra parte, para estudiar matemática y físicamente el modelo sísmico, es necesario tener una base sólida de Teoría de Probabilidades, por ello se dedica la primera parte

de investigación a ese campo.

Se supone que la ocurrencia de eventos sísmicos forma un proceso de Poisson con una razón media de ocurrencia dependiente de la magnitud, para poder obtener una distribución sobre el número de ocurrencias por arriba de una magnitud observada para un período de tiempo basado en la historia sísmica de los datos registrados y para una fuente determinada. Asimismo, es necesario comprobar que los datos sísmicos verifican la suposición sobre independencia espacial y temporal de los eventos.

Combinando las distribuciones binomiales condicionadas con la distribución de ocurrencias de Poisson, se obtiene la distribución del número de ocurrencias para cada magnitud, debido a cada uno de los tipos de fuente.

Para relacionar la aceleración pico de la tierra y la magnitud como una función de la distancia, se usa la relación de Esteva (1973) y a partir de ella se puede calcular la distribución de probabilidad de que alguna aceleración pico de la tierra sea mayor que un cierto valor previamente determinado, para un período de exposición futuro en años en un sitio, debido a los tres tipos de fuentes sísmicas.

Finalmente, se ponen algunos ejemplos de aplicación de las diferentes relaciones previamente desarrolladas, con el

objeto de insistir sobre la importancia del modelo aplicado al riesgo sísmico de Guatemala.

## CAPITULO I

### Formulación Matemática del Modelo de Poisson

- 1.1 Definiciones Previas.
- 1.2 Deducción Matemática del Modelo de Poisson.
- 1.3 Condiciones Necesarias para Aplicar el Modelo.
- 1.4 Algunos ejemplos de aplicación.
- 1.5 Tablas de probabilidad de Poisson.

## 1.1 Definiciones Previas.

Def. 1.1 Un anillo booleano de conjuntos es una clase no vacía  $\mathcal{A}$  de conjuntos que es cerrada bajo uniones y diferencias.

$$E \in \mathcal{A} \wedge F \in \mathcal{A} \text{ entonces } E \cup F \in \mathcal{A} \wedge E - F \in \mathcal{A}$$

Es claro que  $\phi \in \mathcal{A}$  pues  $\phi = E - E \in \mathcal{A}$

Def. 1.2 Un álgebra booleana de conjuntos es una clase no vacía  $\mathcal{A}$  de conjuntos, tal que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{A} \text{ entonces } E \cup F \in \mathcal{A} \\ \text{(b) Si } E \in \mathcal{A} \text{ entonces } C_M E \in \mathcal{A} \end{array} \right\} \text{ cerrada bajo uniones y complementos}$$

Def. 1.3 Un  $\sigma$ -anillo es una clase no vacía  $S$  de conjuntos tal que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } E \in S, F \in S \text{ entonces } E - F \in S \\ \text{(b) } E_i \in S \forall i \in I \text{ entonces } \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in S \end{array} \right\} \text{ cerrada bajo diferencia y uniones contables}$$

Def. 1.4 Una  $\sigma$ -álgebra de conjuntos es una clase no vacía de conjuntos cerrada bajo complementos y uniones contables. Luego, una  $\sigma$ -álgebra es un  $\sigma$ -anillo que contiene a  $M$  (espacio muestral).

Def. 1.5 Una función de conjuntos  $\mu$  cuyo rango son los reales extendidos, definida sobre una clase  $S$  es finitamente aditiva si para toda clase finita, disjunta  $\{E_1, \dots, E_n\}$  de conjuntos en  $S$  cuya unión es  $S$  se tiene:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$$

Def. 1.6 Una función de conjuntos  $\mu$  cuyo rango es la recta real extendida definida sobre una clase  $S$  de conjuntos es aditiva si:

$$E \in S, F \in S \text{ E } E \cup F \in S \wedge E \cap F = \phi$$

$$\text{entonces } \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$$

Def. 1.7 Una función de conjuntos  $\mu$  cuyo rango es la recta real extendida definida sobre una clase  $S$  es contablemente aditiva, si para toda sucesión disjunta  $E_n$  de conjuntos en  $S$  cuya unión está en  $S$  se tiene:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Def. 1.8 Una medida es una función de conjuntos  $\mu$  cuyo rango es la recta real extendida, no negativa y contablemente aditiva definida sobre un anillo  $\mathcal{A}$ , tal que:

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$\text{Puesto que } \bigcup_{i=1}^n E_i = E_1 \cup \dots \cup E_n \cup \emptyset \dots \cup \emptyset \dots$$

una medida es siempre finitamente aditiva.

Def. 1.9 Un espacio medible es un conjunto  $M$  (espacio muestral) y un  $\sigma$ -anillo  $S$  de subconjuntos de  $M$  tal que  $US=M$ . Denotaremos el espacio medible simplemente por  $M$ .

Def. 1.10 Un espacio de medida es un espacio medible  $(M,S)$  y una medida  $\mu$  sobre  $S$  y  $sg$  denota  $(M,S,\mu)$ .

Def. 1.11 Una sucesión de eventos  $E_i$  es independiente si:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) = \prod_{i=1}^n P(E_i)$$

Este es el enfoque utilizado por Paul Halmos (1950) quien finalmente afirma que la probabilidad numérica es una medida  $\mu$  sobre una  $\sigma$ -álgebra booleana  $S$

de subconjuntos de  $M$  donde  $\mu(M)=1$  es decir que es una función:

$$P: \mathcal{P}(M) \longrightarrow [0,1]$$

"   
  $2^M$

en donde  $\mathcal{P}(M)$  es una  $\sigma$ -álgebra  $S$  y representa el conjunto potencia de  $M$ . Esta función está sujeta a los siguientes axiomas:

- (1) Si  $A \in \mathcal{P}(M)$  es un evento, entonces  $0 \leq P(A) \leq 1$
- (2)  $P(\phi) = 0$
- (3)  $P(M) = 1$
- (4) Si  $E_1, E_2, \dots, E_n$  es una sucesión de eventos independientes (mutuamente exclusivos) es decir que cumple con la definición 1.11 entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

Los axiomas son una consecuencia de la definición de una medida que para este caso es la probabilidad numérica.

#### Def. 1.12 Variable Aleatoria

Dado un espacio de probabilidad  $(M, S, P)$  se llama

variable aleatoria  $X$  a una función cuyo dominio es el espacio de medida  $M$  y cuyo rango es  $R$ .

$$X: M \longrightarrow R \quad X(x) = y \in R \quad \forall x \in R \exists P[X \in x] \\ (X)^{-1}(y) \in \mathcal{B} \text{ (Borel)}$$

La variable aleatoria es una magnitud numérica cuyos valores se determinan al azar. Es una función ligada a algún experimento; una vez realizado éste, conocemos el valor de la función. La variable aleatoria puede ser discreta o continua. *de acuerdo a su distribución  $F_X(x)$  si es discreta o continua.*

Def. 1.13 Si  $X$  es una variable aleatoria llamaremos función de distribución a: *la probabilidad de algún evento*

$$F_X(x) = P[X \leq x] \quad \forall x \in R, [X \leq x] \in \mathcal{S} \text{ (}\sigma\text{-álgebra)}$$

Def. 1.14 Distribución Discreta:

Una función de distribución es discreta si el rango de la variable aleatoria  $X$  es finito o numerable. El modelo de Poisson es un ejemplo de una distribución discreta. Además es una distribución contablemente infinita. es decir que:

$$F_X(x) = \sum_n P[X=x_n]$$

Def. 1.15 Asociada a una variable aleatoria discreta o a su correspondiente distribución discreta existe una función de densidad discreta que se representa por

$$f_X(x) \ni f: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$f_X(x) = \begin{cases} P[X=x_n] & \forall x=x_n \\ 0 & \forall x \neq x_n \end{cases}$$

y  $\sum_n f_X(x_n) = 1$  es la distribución de probabilidad.

A la función  $f_X(x)$  se le llama función de densidad de la variable aleatoria  $X$ , o función de densidad de la función de distribución  $F_X(x)$ .

Función de distribución de varias variables.

Consideraremos además, las funciones de distribución de dos variables; ésto es, las funciones de distribución de dos variables aleatorias.

Def. 1.16 Si  $X$  e  $Y$  son dos variables aleatorias, la función de distribución de su conjunto muestral o de distribución bivariable se indicará por  $F_{X,Y}(x,y)$  y se define como:

$$F_{X,Y}(x,y) = P[X \leq x] [Y \leq y]$$

**Def. 1.17 Variable Aleatoria Contínua.**

Una variable aleatoria es contínua cuando el espacio muestral de la variable aleatoria se define como un intervalo de números reales ó como la unión de tales intervalos.

**Def. 1.18 Función de densidad de Probabilidad.**

Si  $X$  es una variable aleatoria contínua decimos que una función  $f$  es la función de densidad de probabilidad para  $X$  si  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $P(a \leq X \leq b)$  está dada por el área bajo la curva  $y=f(x)$  sobre el intervalo de  $a$  hasta  $b$ . El dominio de la función de densidad de probabilidad es  $\mathbb{R}$ . Es decir que:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

*está determinada por la función de densidad*

con la restricción de que  $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$  *la función  $y=f(x)$  es contínua*

$$y \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

*es la función de distribución de probabilidad*

o sea que el área total bajo la gráfica es 1.

**Def. 1.19 Distribución Contínua.**

Se dice que una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución contínua cuando existe una función

*(a < X < b) es un evento en S*

$f_X(x)$  tal que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Def. 1.20 Densidad de las funciones de variables aleatorias. Consideremos  $n$  variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  que tienen una distribución continua.

$$P[(x_1, \dots, x_n) \in S] = \int_S \dots \int_S f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

en el supuesto de que la integral exista.

Def. 1.21 Se llama sucesión de  $n$  ensayos de Bernoulli al experimento que consiste en realizar  $n$  pruebas que satisfacen las siguientes condiciones:

- (a) Son posibles dos eventos que designaremos por  $E$  y  $F$ , éxito y fracaso respectivamente; y el resultado de cada prueba es uno de estos eventos.
- (b) El resultado de cada prueba es independiente de los resultados de las pruebas anteriores.
- (c) La probabilidad de que ocurra un evento  $E$  es invariante; es decir, no cambia de una prueba a otra. La probabilidad de que ocurra un even

to E se conserva a lo largo de n ensayos.

Es usual denotar la probabilidad de éxito y fracaso por p y q respectivamente por lo que de acuerdo al axioma 3:  $p+q=1$ .

El ejemplo más simple de un ensayo de Bernoulli es de lanzar una moneda; la probabilidad de éxito es igual a la probabilidad de fracaso lo que significa:

$$p=q=\frac{1}{2}$$

que está de acuerdo al axioma (1) previamente establecido.

Def. 1.22 Supongamos que se tiene una colección de n objetos. Una combinación de estos n objetos tomando r a la vez es un subconjunto de r elementos, donde el orden no importa.

El número de combinaciones de n objetos tomados r a la vez que se denota por el símbolo  $\binom{n}{r}$  puede calcularse por medio de:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

## 1.2 Deducción Matemática del Modelo de Poisson.

En muchas aplicaciones probabilísticas se confrontan ensayos de Bernoulli donde comparativamente el número de ensayos o pruebas "n" es grande y la probabilidad de ocurrencia p es pequeña en tanto que el producto  $\lambda=np$  es de magnitud moderada.

En tales casos, es conveniente usar la aproximación de Poisson a la distribución binomial, que se desarrolla a continuación.

La distribución exige que bajo ciertas circunstancias, el número de éxitos en n ensayos independientes repetidos de Bernoulli con probabilidad de éxito p en cada ensayo, obedece a una ley de probabilidad con parámetro  $\lambda=np$ .

En efecto, consideremos una sucesión de Bernoulli en la que la probabilidad del evento E (éxito) en cada prueba es p;  $0 \leq p \leq 1$  de acuerdo al axioma (1) de probabilidad, realizándose n pruebas.

Se define una variable aleatoria X sobre  $\Omega = \{S_n / S_n \text{ evento éxito}\}$  tal que:

$$\sum_{k=0}^n [X=k] = S_n$$

Por la Def. 1.22 en  $n$  pruebas hay  $\binom{n}{k}$  maneras de elegir  $k$  pruebas en las cuales ocurra  $E$ . Además la probabilidad del evento  $F$  (fracaso) es  $q=1-p$ .

Hay  $\binom{n}{k}$  eventos en  $[X=k]$  y cada uno de ellos tiene probabilidad  $p^k(1-p)^{n-k}$ . Puesto que  $p$  ocurre " $k$ " veces luego  $(1-p)$  solo puede ocurrir " $n-k$ " veces.

Entonces la función de densidad para  $x$  es:

$$f_X(x) = P[X=x] = \binom{n}{x} p^x (q)^{n-x} (1-1)$$

A este conjunto de probabilidades es al que nos referimos cuando hablamos de la distribución binomial de probabilidades.

En particular, la probabilidad de ningún éxito en  $n$  ensayos es  $q^n$  y la probabilidad de al menos un éxito es  $1-q^n=p^n$ .

Trataremos a  $p$  como una constante y denotaremos por  $S_n$  el número de éxitos en  $n$  ensayos, entonces:

$$P[S_n=k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

o bien  $b(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$  que es la notación usada por Feller (1957).

En la terminología de probabilidades  $S_n$  es una variable aleatoria y la función (1-1) es la distribución de esta variable aleatoria a la cual se le llama distribución binomial.

Ahora se muestra que el número de éxitos en  $n$  ensayos independientes repetidos de Bernoulli, con probabilidad de éxito  $p$  en cada ensayo obedece aproximadamente a la ley de probabilidad de Poisson con parámetro  $\lambda=np$ .

$$k=0 \Rightarrow b(0;n,p) = (1-p)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

tomando el log natural de ambos miembros de la igualdad:

$$\ln b(0;n,p) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$$

pero, la expansión de Taylor de log natural es

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\text{entonces } \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = -\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{2n^2} - \frac{\lambda^3}{3n^3} - \dots$$

por lo tanto si  $n$  es grande:

$$\ln b(0;n,p) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda^3}{3n^2} \approx -\lambda$$

despreciando los términos de grado  $\geq 2$  entonces:

$$b(0;n,p) \approx e^{-\lambda}$$

Además si  $p$  es muy pequeño y  $q \approx 1$  tenemos:

$$\frac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = \frac{\lambda - (k-1)p}{kq} \approx \frac{\lambda}{k}$$

$$\text{Es decir que } b(k;n,p) \approx \frac{\lambda}{k} b(k-1;n,p)$$

utilizando  $b(0;n,p) \approx e^{-\lambda}$  por rel. recursiva obtenemos que

$$b(1;n,p) \approx \lambda e^{-\lambda}$$

$$b(2;n,p) \approx \frac{1}{2} \lambda^2 e^{-\lambda}$$

y luego por inducción para  $k$

$$b(k;n,p) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p(k;\lambda) \quad (1-2)$$

Esta es la aproximación de Poisson a la distribución binomial cuando  $n$  es suficientemente grande y  $p$  es muy pequeña.

La distribución de Poisson (1-2) es una distribución de probabilidad. Por definición,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k;\lambda) = 1$$

que puede probarse de la siguiente manera:

$e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$  es el desarrollo en serie de Taylor de  $e^\lambda$   
puesto que  $e^\lambda$  es analítica

$$\text{Entonces: } \sum_{k=0}^{\infty} p(k, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^\lambda = 1$$

### 1.3 Condiciones Necesarias para Aplicar el Modelo.

#### 1.3.1 Hipótesis bajo las cuales se aplica Poisson.

La distribución de Poisson se deduce entonces como una aproximación de la distribución binomial, cuando la probabilidad de que ocurra un evento es muy pequeña y el número de pruebas  $n$  es muy grande. En este caso, la distribución binomial es aproximadamente la ley de Poisson de parámetro  $\lambda=np$  el cual ya mencioné tiene una magnitud moderada.

Según Feller (1957), la aproximación de Poisson se aplica cuando la distribución binomial de probabilidades está muy lejos de tener la forma de campana, es decir cuando  $p \leq 0.1$

Puede ocurrir que  $p$  sea muy pequeña en cuyo caso se usa la aproximación de Poisson; pero si  $n$  es "demasiado" grande y si se cumple:

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-1/2 y^2}}{\frac{x-np-1/2}{\sqrt{npq}}} dy$$

entonces la distribución binomial es igual a la distribución normal en cuyo caso es mejor utilizar la aproximación normal.

Esto quiere decir, que para valores muy grandes de  $\lambda=np$  la ley de Poisson y la ley normal se aproximan. Además Feller (1957), indica varios ejemplos de experimentos y observaciones que conducen a la interpretación de (1-2) que se trata en la próxima sección.

Según Parzen (1960) los tipos de eventos aleatorios que conducen a aplicar la ley de probabilidad pueden ser comprendidos al considerar los tipos de eventos que conducen a aplicar la ley binomial.

La situación en la cual se aplica la ley binomial es aquella en la cual se observan  $n$  ocurrencias independientes de algún experimento. Entonces se puede determinar: (1) el número de ensayos en los cuales ocurrió cierto evento y (2) el número de ensayos en los cuales el evento no ocurrió. Hay eventos aleatorios, sin embargo, que no ocurren como resultados de los ensayos de un experimento pero sí como puntos al azar en el tiempo y en el espacio, tales como los sismos. Para tales eventos se puede contar el número de ocurrencias del evento en un período de tiempo (o espacio). Sin embargo, en este caso no tiene sentido hablar del número de no ocurrencias de tal evento en un período de tiempo (o espacio).

Por ejemplo, se considera una sucesión de eventos aleatorios que ocurren en el tiempo, tales como desintegración radiactiva, el número de organismos en una unidad de volumen de algún fluido, el número de aviones que arriban a un aeropuerto en una hora ó número de llamadas que entran en una central telefónica por hora. Cada evento está representado por algún punto en el eje tiempo y lo que nos interesa es la distribución de esos puntos ó eventos.

Las suposiciones físicas más simples conducen a que  $p(k, \lambda)$  es la probabilidad de encontrar  $k$  puntos dentro de un intervalo fijo de una longitud específica. Esto será importante para la aplicación que desarrollaré en este trabajo. Las suposiciones físicas pueden expresarse así:

- 1) Las condiciones del experimento permanecen constantes en el tiempo.
- 2) Los intervalos de tiempo, no se entrelazan entre sí y son independientes en el sentido de que la información relacionada con el número de eventos en un intervalo, no revela nada sobre el otro.

Si imaginamos un intervalo de unidad de tiempo fraccionado

en  $n$  subintervalos de longitud  $1/n$ ; una colección finita de puntos en el intervalo puede tomarse como el resultado de un proceso aleatorio en el cual cada subintervalo tiene la misma probabilidad  $p_n$  de contener uno o más puntos de la colección.

Un subintervalo puede estar ocupado o ser vacío; y la independencia que se asumió de los intervalos no entrelazados implica que estamos tratando con ensayos de Bernoulli. Se asume que la probabilidad de que exactamente  $k$  subintervalos estén ocupados está dada por  $p(k, \lambda_n)$  con  $\lambda_n = np_n$ . La probabilidad de que el intervalo completo no contenga ningún punto de la colección tiende a un límite finito. Pero este es el evento que ningún subintervalo sea ocupado y su probabilidad es  $q_n = (1 - p_n)^n$ .

Aplicando logaritmos se ve que esta cantidad aproxima el límite si  $np_n$  lo hace. Entonces, se requiere que exista un número  $\lambda$  tal que  $np_n \rightarrow \lambda$  o sea  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ . En este caso, la probabilidad de que exactamente  $k$  subintervalos estén ocupados tiende a  $p(k, \lambda)$ .

Hay aplicaciones en las que es necesario reemplazar el intervalo de unidad de tiempo por un intervalo de longitud  $t$ . Si

lo dividimos en subintervalos de longitud  $1/n$  entonces las probabilidades  $p_n$  no cambian, pero el número de subintervalos está dado por el entero más próximo a  $nt$ .

Esto nos lleva a considerar:

$$P(k, \lambda t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (1-3)$$

Como la probabilidad de encontrar exactamente  $k$  puntos en un intervalo fijo de longitud  $t$ . La probabilidad de ningún punto en un intervalo de longitud  $t$  es:

$$P(0, \lambda t) = e^{-\lambda t} \quad (1-4)$$

y la probabilidad de encontrar al menos un punto es  $1 - e^{-\lambda t}$ .

El parámetro  $\lambda$  es una constante física que determina la densidad de puntos del eje  $t$ . Cuanto más grande es  $\lambda$  más pequeña es la probabilidad de encontrar algún punto.

### 1.3.2 Distribuciones Espaciales:

Hemos considerado la distribución de eventos aleatorios o sean puntos a lo largo del eje  $t$ ; pero el mismo argumento es

aplicable a la distribución de puntos en el plano o en el espacio.

En lugar de intervalos de longitud, se tienen dominios de área o volumen  $t$ , y la suposición fundamental es que la probabilidad de encontrar  $k$  puntos en un dominio específico depende solo del área o del volumen del dominio pero en absoluto de la forma.

Por lo demás, se consideran las mismas suposiciones anteriores.

- (1) Si  $t$  es pequeño, la probabilidad de encontrar más de un punto en un dominio de volumen  $t$  es pequeña comparada con  $t$ .
- (2) Los dominios no se entrelazan y son mutuamente independientes.

Para encontrar la probabilidad de que un dominio de volumen  $t$  contenga exactamente  $k$  puntos al azar, subdividimos en  $n$  subdominios y aproximamos la probabilidad requerida por la probabilidad de  $k$  éxitos en  $n$  ensayos.

Esto significa que se desprecia la probabilidad de encontrar más de un punto en el mismo subdominio pero la suposición (1) implica que el error tiende a cero conforme  $n \rightarrow \infty$ . En el límite obtenemos de nuevo la distribución de Poisson.

#### 1.4 Algunos Ejemplos de Aplicación.

Las estrellas en el espacio, las nueces en un pastel, el flujo en materiales, cuevas de animales en el campo, número de llamadas telefónicas por minuto en una central telefónica, número de átomos que decaen por millonésimo de segundo en un compuesto radio activo, el número de accidentes por semana en una gran fábrica, etc, son variables aleatorias que están distribuidas aproximadamente según la distribución de Poisson. Es común en todas ellas, que el número de eventos es grande y la probabilidad de ocurrencia de algún evento en un intervalo de tiempo es pequeña.

##### Ejemplo 1)

Se sabe que la probabilidad de que un artículo producido por cierta máquina sea defectuoso es 0.1. Encontrar la probabilidad de que de una muestra de 10 artículos, seleccionada al azar de la producción, contenga a lo sumo un artículo defectuoso.

Solución:

La probabilidad requerida usando la ley binomial es: según la relación (1-1)

$$\begin{aligned}
 P[X \leq 1] &= \binom{10}{0} (0.1)^0 (0.9)^{10} + \binom{10}{1} (0.1)^1 (0.9)^9 \\
 &= 0.7361 = 73.6\%
 \end{aligned}$$

donde  $X$  representa la variable aleatoria artículo defectuoso.

La probabilidad requerida usando la aproximación de Poisson

$$\begin{aligned}
 P[X \leq 1] &= \sum_{k=0}^1 e^{-np} \frac{(np)^k}{k!} \\
 &= e^{-10(0.1)} + e^{-10(0.1)} \frac{(10 \times 0.1)}{1} \\
 &= e^{-1} + e^{-1} \\
 &= 0.7358 \approx 73.6\%
 \end{aligned}$$

Con este resultado se comprueba que la ley de Poisson es aproximable a la ley binomial.

Ejemplo 2) Prueba de Seguridad para una Vacuna.

En cierta etapa de la producción de cierta vacuna, ésta contiene un promedio de  $m$  virus vivos por  $\text{cm}^3$ . Se asume que en un recipiente que contiene  $V \text{ cm}^3$  de vacuna hay  $n=mV$  virus. Se extrae una muestra  $S$  de vacuna del recipiente con un volu

men de  $v \text{ cm}^3$ . Encontrar la probabilidad para  $k=0,1,\dots,n$ , de que la muestra contenga  $k$  virus.

Solución:

Sea  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  la localización de los  $n$  virus en el recipiente.

$$z_j = \begin{cases} s & \text{si } j \in S \\ f & \text{si } j \notin S \end{cases}$$

La probabilidad  $p$  de que un virus del recipiente estuviera en la muestra es:

$$p = \frac{v}{V} \quad \begin{array}{l} \text{la razón del volumen de la muestra al} \\ \text{volumen del recipiente.} \end{array}$$

Se asume que los virus están uniformemente dispersos en el recipiente. Si además, se asume que los virus están independientemente dispersos en el recipiente se sigue de la ley binomial.

$$P[X=k] = \binom{mV}{k} \left(\frac{v}{V}\right)^k \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{mV-k}$$

Si se asume que la muestra tiene un volumen menor que 1% del volumen  $V$  del recipiente, entonces por la aproximación de Poisson a la ley binomial:

$$P[X=k] = e^{-mV} \frac{(mV)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n e^{-mV} \frac{(mV)^k}{k!}$$

Supongamos que el recipiente de vacuna contiene 5 virus por cada 100 cm<sup>3</sup>. Entonces  $m=0.005$ . Además se extrae una muestra de 600 cm<sup>3</sup> de volumen y se busca encontrar la probabilidad de que la muestra no contenga ningún virus. Entonces:

$$P[X=0] = e^{-mV} = e^{-(0.005)(600)} = e^{-3} = 0.0498 = 5.0\%$$

o bien, la probabilidad de que la muestra contenga algún virus:

$$\begin{aligned} P[\text{algún virus}] &= 1 - P[\text{ningún virus}] \\ &= 1 - 0.0498 \\ &= 0.9502 = 95.02\% \end{aligned}$$

Este ejemplo es de gran importancia en el diseño de un mecanismo de chequeo para la confiabilidad de una vacuna, pues si la muestra no contiene virus se puede asumir que el recipiente que representa la población del cual se extrajo una muestra está libre de virus.

Si se desea producir vacuna libre de virus, se debe diseñar un proceso de producción tal que la densidad "m" de virus en la vacuna sea 0.

Para chequearlo, extraemos una muestra de la vacuna producida. El cálculo efectuado dió como resultado una probabilidad muy pequeña  $<0.1$  por lo cual el modelo de Poisson se adecúa.

TABLA I

## Probabilidades de Poisson

La tabla muestra  $e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$  para valores  $\lambda$  en el intervalo de 0.1, para valores de  $\lambda$  en el intervalo de 2.0 a 4.0 en incrementos de 0.2 y para valores de  $\lambda$  en el intervalo de 4 a 10 en incrementos de 1.

En la columna de la izquierda aparecen los valores de  $\lambda$  de 0.1 a 10 y en la fila superior los valores de  $n$  desde 0 hasta 12.

En la parte inferior de la página continúa la tabla para valores de  $n$  desde 13 hasta 24 y para valores de  $\lambda$  de 5 a 10.

$\lambda^x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.1	.9048	.0905	.0045	.0002	.0000								
.2	.8187	.1637	.0164	.0011	.0001	.0000							
.3	.7408	.2222	.0333	.0033	.0002	.0000							
.4	.6703	.2681	.0536	.0072	.0007	.0001	.0000						
.5	.6065	.3033	.0758	.0126	.0016	.0002	.0000						
.6	.5488	.3293	.0988	.0198	.0030	.0004	.0000						
.7	.4956	.3476	.1217	.0284	.0050	.0007	.0001	.0000					
.8	.4493	.3595	.1438	.0383	.0077	.0012	.0002	.0000					
.9	.4056	.3659	.1647	.0494	.0111	.0020	.0003	.0000					
1.0	.3579	.3679	.1839	.0613	.0153	.0031	.0005	.0001	.0000				
1.1	.3329	.3552	.2014	.0738	.0203	.0045	.0008	.0001	.0000				
1.2	.3012	.3614	.2169	.0867	.0260	.0062	.0012	.0002	.0000				
1.3	.2725	.3543	.2303	.0998	.0324	.0084	.0018	.0003	.0001	.0000			
1.4	.2456	.3452	.2417	.1128	.0395	.0111	.0026	.0005	.0001	.0000			
1.5	.2231	.3347	.2510	.1255	.0471	.0141	.0035	.0008	.0001	.0000			
1.6	.2019	.3230	.2584	.1378	.0551	.0176	.0047	.0011	.0002	.0000			
1.7	.1827	.3106	.2640	.1496	.0636	.0216	.0061	.0015	.0003	.0001	.0000		
1.8	.1553	.2975	.2678	.1607	.0723	.0260	.0078	.0020	.0005	.0001	.0000		
1.9	.1495	.2842	.2700	.1710	.0812	.0309	.0098	.0027	.0006	.0001	.0000		
2.0	.1353	.2707	.2707	.1804	.0902	.0351	.0120	.0034	.0009	.0002	.0000		
2.2	.1108	.2438	.2681	.1966	.1082	.0476	.0174	.0055	.0015	.0004	.0001	.0000	
2.4	.0907	.2177	.2613	.2090	.1254	.0602	.0241	.0083	.0025	.0007	.0002	.0000	
2.6	.0743	.1931	.2510	.2176	.1414	.0735	.0319	.0118	.0038	.0011	.0003	.0001	.0000
2.8	.0608	.1703	.2384	.2225	.1557	.0872	.0407	.0163	.0057	.0018	.0005	.0001	.0000
3.0	.0498	.1494	.2240	.2240	.1680	.1008	.0504	.0216	.0081	.0027	.0008	.0002	.0001
3.2	.0408	.1304	.2087	.2226	.1781	.1140	.0608	.0278	.0111	.0040	.0013	.0004	.0001
3.4	.0334	.1135	.1929	.2186	.1858	.1264	.0716	.0348	.0148	.0056	.0019	.0006	.0002
3.6	.0273	.0984	.1771	.2125	.1912	.1377	.0826	.0425	.0191	.0076	.0028	.0009	.0003
3.8	.0224	.0850	.1615	.2046	.1944	.1477	.0936	.0508	.0241	.0102	.0039	.0013	.0004
4.0	.0183	.0733	.1465	.1954	.1954	.1563	.1042	.0595	.0298	.0132	.0053	.0019	.0006
5.0	.0067	.0337	.0842	.1404	.1755	.1755	.1462	.1044	.0653	.0363	.0181	.0082	.0034
6.0	.0025	.0149	.0446	.0892	.1339	.1606	.1606	.1377	.1033	.0688	.0413	.0225	.0113
7.0	.0009	.0064	.0223	.0521	.0912	.1277	.1490	.1490	.1304	.1014	.0710	.0452	.0264
8.0	.0003	.0027	.0107	.0286	.0573	.0916	.1221	.1396	.1396	.1241	.0993	.0722	.0481
9.0	.0001	.0011	.0050	.0150	.0337	.0507	.0911	.1171	.1318	.1318	.1186	.0970	.0728
10.0	.0000	.0005	.0023	.0076	.0189	.0378	.0631	.0901	.1126	.1251	.1251	.1137	.0948

$\lambda^x$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
5.0	.0013	.0005	.0002									
6.0	.0052	.0022	.0009	.0003	.0001							
7.0	.0142	.0071	.0033	.0014	.0006	.0002	.0001					
8.0	.0295	.0159	.0090	.0045	.0021	.0009	.0004	.0002	.0001			
9.0	.0504	.0324	.0194	.0109	.0058	.0029	.0014	.0006	.0003	.0001		
10.0	.0729	.0521	.0347	.0217	.0128	.0071	.0037	.0019	.0009	.0004	.0002	.0001

CAPITULO II  
APLICACION DEL MODELO DE POISSON  
A EVENTOS SISMICOS

- 2.1 Suposiciones bajo las cuales se aplica el Modelo de Poisson a eventos sísmicos.
- 2.2 Terminología de sismos
  - 2.2.1 Producción de sismos
  - 2.2.2 Fuentes sísmicas
  - 2.2.3 Ondas sísmicas
  - 2.2.4 Magnitud de un sismo
  - 2.2.5 Principales instrumentos de detección sismológica
  - 2.2.6 Datos sísmicos y el Modelo de Poisson
  - 2.2.7 Mapas de riesgo sísmico.

## 2.1 Suposiciones bajo las cuales se aplica el Modelo de Poisson a eventos sísmicos.

La ocurrencia de eventos sísmicos se adecúa al modelo de Poisson puesto que: dado que ocurran un gran número de sismos, si se escoge la variable aleatoria número de sismos por arriba de la magnitud  $M$  (magnitud hipotética) y se le considera como el evento éxito; entonces, la probabilidad de que ocurra un sismo de magnitud mayor que  $M$  en un sitio determinado es muy pequeña. Además, para los eventos sísmicos que se adecúan al modelo de Poisson, deben ser válidas las siguientes suposiciones según Kiremidjian, Shah y L. (1977).

- (a) Los sismos o terremotos son espacialmente independientes.
- (b) Los sismos o terremotos son temporalmente independientes.
- (c) La probabilidad de que dos eventos sísmicos ocurran en el mismo lugar y en el mismo instante de tiempo tiende a cero.

La primera suposición implica que la ocurrencia o no ocurrencia de <sup>un</sup> evento sísmico en un sitio no afecta a la ocurrencia o no ocurrencia de otro evento sísmico en algún otro sitio.

La segunda suposición implica que los eventos sísmicos no tienen memoria en el tiempo.

La tercera suposición implica que para un pequeño intervalo de tiempo,  $\Delta t$ , no puede ocurrir más de un evento sísmico. Esta suposición se ajusta al fenómeno físico.

Por lo tanto, notamos que estas suposiciones se adecúan perfectamente al modelo de Poisson.

Los eventos sísmicos ocurren en el tiempo y en el espacio; razón por la cual, se escoge un eje representativo del tiempo, de manera que cada sismo está representado por algún punto en el eje tiempo y lo que nos interesa es analizar la distribución de estos puntos que representan a los eventos sísmicos.

El modelo de Poisson se puede definir según

$$P(k, \lambda t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

como la probabilidad de encontrar  $k$  sismos dentro de un intervalo de una longitud específica del eje tiempo.

Los intervalos de tiempo, no se entrelazan entre sí; y son independientes en el sentido de que la información relacionada con el número de sismos en un intervalo de tiempo no revela nada sobre el otro. Esta independencia que se asume de intervalos no entrelazados confirma que estamos aplicando ensayos de Bernoulli.

El parámetro  $\lambda$  es este caso una constante física que corresponde a la densidad de sismos en el eje tiempo. Cuanto más grande es  $\lambda$ , más pequeña es la probabilidad de encontrar algún sismo.

Para determinar el riesgo sísmico de un país, es necesario predecir los eventos sísmicos. Los modelos estadísticos utilizados para esta predicción son: el modelo de Poisson, el de Markow y el de Bayesia.

El modelo de Poisson utilizado por Shah et al en varios trabajos se adapta mejor dado a su simplicidad, su muy difundido uso en la literatura científica y porque los resultados que se obtienen son similares a los que surgen de los otros modelos mencionados.

## 2.2 Terminología de Sismos

### 2.2.1 Producción de sismos.

Hoy en día, la atención de los sismólogos está enfocada en las formas de reducir los peligros de los terremotos, prediciendo sus consecuencias. El término predicción de sismos, sugiere determinar la hora, lugar y magnitud de futuros terremotos. Igualmente importante es también, determinar cómo tiembla y se mueve la tierra durante un terremoto, qué tan fuerte tiembla y qué tanto dura el sismo.

Para predecir tanto la ocurrencia de un sismo y el movimiento de la tierra que este genera, es esencial comprender las características de la fuente del sismo.

Hasta ahora, nuestra comprensión de las fuentes proviene de las medidas tomadas durante la ocurrencia de un sismo en una estación localizada a alguna distancia de la fuente.

Ya se ha observado, que el daño causado por muchos terremotos, se concentra en una zona angosta, lo que sugiere que los terremotos tienen una fuente localizada que podría ser por ejemplo una falla.

Asímismo, cuando el esfuerzo que soportan las rocas en las fallas es grande, hay un punto de ruptura inicial llamado hipocentro, el cual puede estar cerca de la superficie terrestre o muy lejos de ella. Las ondas sísmicas, se irradian del hipocentro en todas direcciones, produciendo así un sismo o terremoto.

El punto sobre el hipocentro en la superficie de la tierra es el epicentro de los sismos.

La mayoría de terremotos son generados en zonas donde enormes placas de la litósfera se desplazan unas con respecto a las otras, pero también se producen como consecuencia de la actividad volcánica.

### 2.2.2 Fuentes sísmicas.

La forma en que la tierra se deforma y la naturaleza de las ondas sísmicas que se irradian durante un sismo, indican la información básica sobre la fuente del sismo: sus dimensiones, su forma y su orientación.

Los sismólogos deducen la naturaleza de la fuente por el procedimiento de construir un modelo teórico de ella, calculan-

do un patrón de la irradiación sísmica producida y estimando cómo se propaga el sismo hasta el sismógrafo.

Básicamente existen, según Kiremidjian et al (1977) tres tipos de fuentes: (a) Fuente Puntual; (b) Fuente de Línea y (c) Fuente de Area.

En particular para Guatemala, las más importantes son las fuentes de línea, puesto que los mayores sismos se producen a lo largo de fallas. Según el estudio realizado por estos autores, ellos hicieron uso de 18 fuentes de línea.

Además, recolectaron un total de 1153 registros de eventos sísmicos para todas las fuentes, conteniendo información sobre la magnitud de Richter, la localización epicentral, la profundidad focal y el tiempo de ocurrencia.

### 2.2.3 Ondas Sísmicas.

Las hay de varios tipos, entre las cuales por la información que proporcionan sobresalen dos: las ondas S y las ondas P.

Según D. M. Boore (1977) las ondas P son ondas longitudinales de compresión. Las ondas S son ondas transversales o de corte.

Observando la diferencia en el tiempo de llegada de las ondas S y las ondas P en alguna estación de registro, es posible calcular la distancia del sismo a la estación. Esta es la técnica utilizada por muchos centros sismológicos, entre ellos el INSIVUHME de Guatemala. Otros como el Servicio Nacional de Información de Terremotos (NEIC) en Boulden, Colorado recopilan datos registrados de todo el mundo y determinan la posición de un terremoto inmediatamente después del evento.

#### 2.2.4. Magnitud de un Sismo.

La medida de la intensidad de un sismo es dada por la escala de magnitudes desarrollada entre 1930 y 1940 por Charles F. Richter y Benno Gutenberg. La escala se basa en que la magnitud debe ser una medida absoluta de la energía liberada por un sismo y no debe ser afectada por la localización del sismógrafo o el tipo de sismógrafo empleado.

En la escala de Richter, los números mayores corresponden a los mayores eventos sísmicos.

Según Kiremidjian, et al (1977), la magnitud de Richter está relacionada con la liberación de toda la energía de un e

vento sísmico. Es importante notar que la magnitud de Richter transmite información solamente en el epicentro o hipocentro.

Según D. M. Boore (1977), el método de Richter para determinar la magnitud de un terremoto es muy simple. Primero el sismólogo mide la amplitud del movimiento terrestre registrado en cierta parte específica de las ondas sísmicas. A continuación, se divide la amplitud registrada del movimiento terrestre por la magnificación del sismógrafo que estima el verdadero movimiento terrestre en la estación sísmográfica. Luego, se calcula el logaritmo en base 10 del movimiento terrestre. Entonces, se aplican ciertas correcciones empíricas a este número para compensar la atenuación del movimiento terrestre al irradiarse fuera de la fuente del terremoto y para el grado al cual la respuesta del sismógrafo particular está influido por las condiciones geológicas locales. Puesto que la escala está basada en el logaritmo común del desplazamiento terrestre corregido, cada aumento de una unidad de magnitud implica un incremento de un factor de 10 en la amplitud del movimiento terrestre.

Luego de que se ha determinado la localización y la magnitud de un sismo en el sismógrafo es deseable obtener la geome---

tría de la fuente, ésto es, la orientación de la falla, las dimensiones del plano fallado que se ha desplazado y la dirección del desplazamiento en el plano fallado.

#### 2.2.5 Principales Instrumentos de Detección Sismológica.

##### a) El acelerógrafo.

Es el instrumento más usado para medir la aceleración producida por un sismo. Para ello, es necesario hablar sobre la aceleración pico de la superficie terrestre expresada en términos de la aceleración de la gravedad en la superficie de la tierra, la cual se mide directamente de los registros del acelerógrafo. Esta es utilizada por los ingenieros para especificar el movimiento de tierra que puede soportar una estructura. La aceleración pico de la tierra, disminuye con la distancia de la falla, puesto que la energía de las ondas va atenuándose.

Asímismo, la aceleración pico de la tierra está relacionada con la magnitud del sismo.

En el estudio de Kiremidjian, Shah y Lubetkin (1977) esta variable se utiliza como parámetro para determinar la carga sísmica en un lugar.

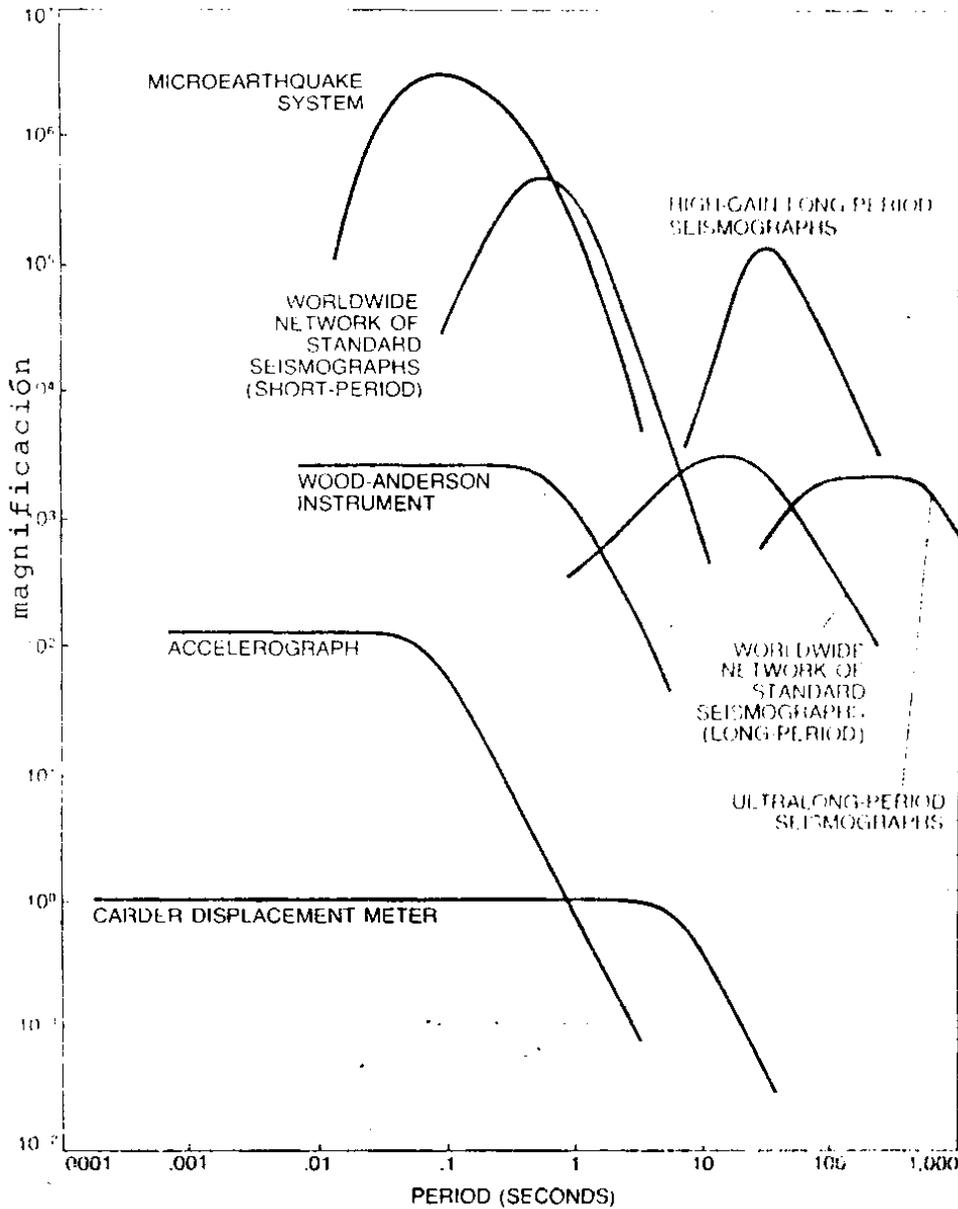
b) El sismógrafo:

Es el instrumento que sirve para medir la localización y la magnitud de un sismo. Este aparato registra las ondas sísmicas y las grafica.

La figura 2.1 muestra la respuesta de varios tipos de sismógrafos, junto con algunas de las características de los aparatos. La figura 2.2 muestra algunos sismogramas.

Figura 2.1

Tomado de Revista Scientific American Diciembre 1977  
 Artículo de David M. Boore



RESPUESTA DE VARIOS  
 TIPOS DE SISMOGRAMAS

## RESPUESTA DE VARIOS TIPOS DE SISMOGRAMAS

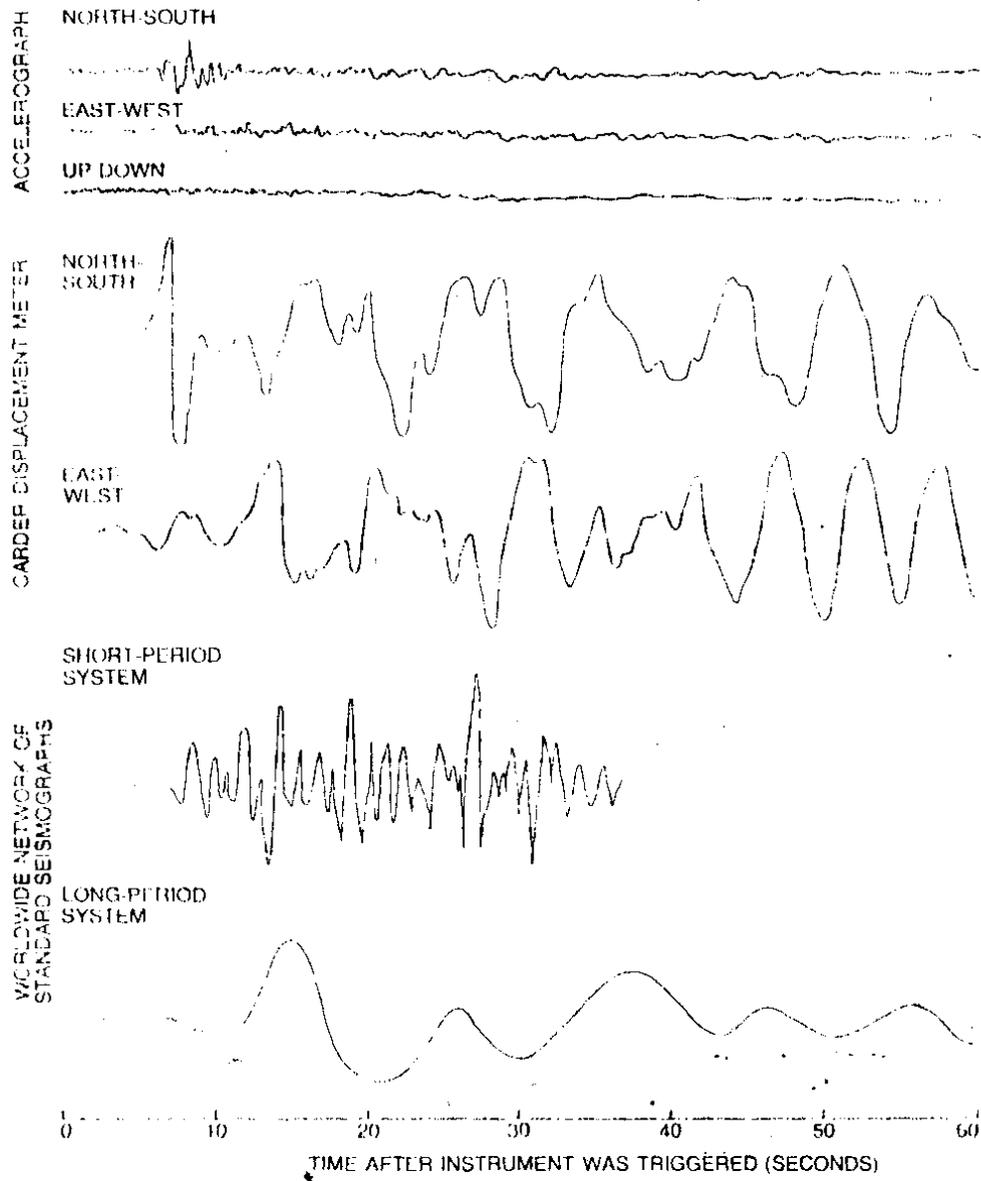
Ha sido ajustada a un monitor de ondas sísmicas sobre un espectro de período y amplitud. La magnificación del instru-mento es el número de veces que éste amplifica el movimien-to de tierra para que pueda ser registrado.

La amplitud del movimiento de tierra en cm es aproximadamente igual al inverso de la magnificación.

El sistema microsismo registra pequeños sismos alrededor de 100 Km del instrumento. El instrumento Wood-Anderson registra sismos moderados a distancias de varios cientos de Kms. Los sismos de magnitud moderada que ocurren casi en cual----quier parte del mundo pueden registrarse en los sistemas de período corto y período largo de Worldwide Network of Stan----dard Seismograms o en instrumentos especiales tales como el sismógrafo de período ultralargo o sismógrafo de alto y lar---go período. El metro desplazamiento Carder y el acelerógra---fo registran el temblor fuerte cerca de una falla.

Figura 2.2

Tomado de la revista Scientific American Diciembre de 1977



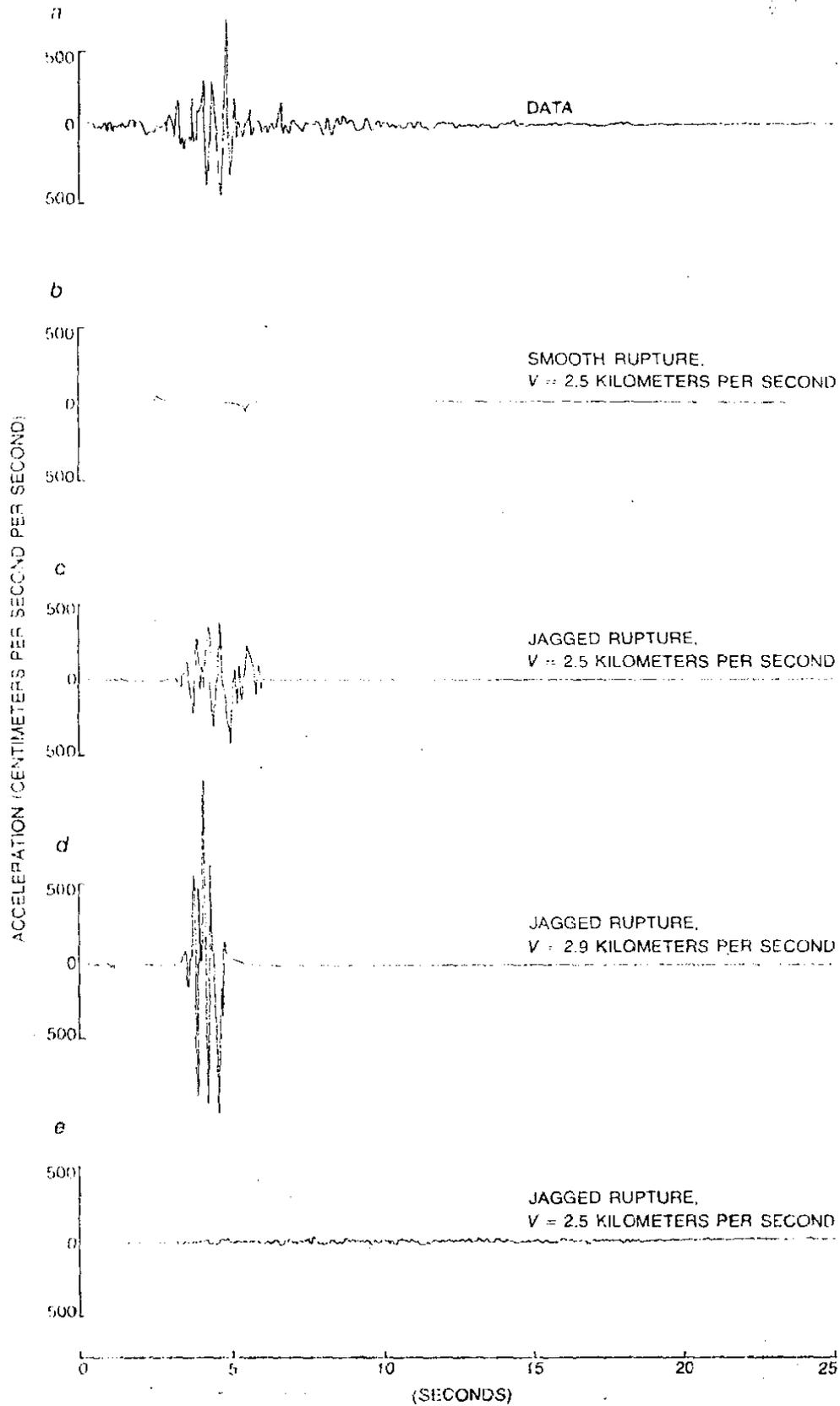
TIPOS DE SISMOGRAMAS

## TIPOS DE SISMOGRAMAS

Los dos conjuntos de curvas superiores son los registros de un acelerograma y un metro desplazamiento Carder en El Centro California, de un terremoto en Borrego Mountain a 60 Kms de distancia. La primera pulsación fuerte en cada registro es la onda S u onda de corte la cual arrivó segundos más tarde que la P. Las prominencias en los registros del metro de desplazamiento Carder son resonancias de las ondas sísmicas sobre la gruesa capa de sedimentos de Imperial Valley. Las curvas inferiores son los registros hechos en La Paz Bolivia de la componente vertical de la onda P inicial del mismo terremoto que fue registrado por un sismógrafo de período corto y un sismógrafo de período largo en Worlwide Network.

Figura No. 2.3

Tomado de la revista Scientific American Diciembre de 1977.



ACELEROGRAMAS SINTETICOS

## ACELEROGRAMAS SINTETICOS

Fueron construidos en una computadora por D. M. Boore y William Joyner del U. S. Geodegical Survey para determinar experimentalmente cómo un sismo genera temblor de tierra. Un acelerograma actual se muestra en la figura en (a). Si el sismo fuera producido por una ruptura de la falla que se propaga a la estación sismográfica teórica su acelerograma consiste en pocos picos aislados que corresponden a la radia---ción emitida durante la ruptura (b). En (c) se observa un temblor más continuo. En (d) la ruptura se propaga al acelerógrafo teórico a una velocidad cercana a la velocidad de las ondas sísmicas, luego la radiación sísmica de la falla arrivó en un pico afilado. En (e) se observa la ruptura que se propaga lejos del acelerógrafo teórico y la radiación sísmica se dispersó a lo largo de un intervalo de tiempo.

### 2.2.6 Datos Sísmicos y el Modelo de Poisson.

Es necesario establecer relaciones de recurrencia relacionadas con la magnitud de Richter, las características de la fuente y el período de tiempo para adecuar los datos al modelo de Poisson.

Específicamente, los datos deben contener información sobre la magnitud de los sismos, sus epicentros y profundidades focales.

La magnitud de Richter nos servirá para definir el número de ocurrencias sísmicas por arriba de la magnitud  $M$  (magnitud hipotética).

Por otra parte, las características de la fuente son muy importantes pues éstas nos indican que forma tiene la fuente; es decir, si es un punto, una línea o un área. La magnitud máxima de Richter fue asignada para cada fuente, al considerar el mayor evento sísmico asociado con cada fuente, la longitud de la fuente y el sistema de falla al cual éste podría pertenecer.

Entonces, dependiendo de la fuente y del valor de  $M$ , se puede definir el número promedio de eventos por arriba de la

magnitud  $M$  por unidad de área, si se trata de una fuente de área; por unidad de longitud si se trata de una fuente de línea y también una unidad de tiempo en años.

Además, se asume para todas las fuentes, una relación de reurrencia logarítmico-lineal. Para obtener las relaciones de recurrencia logarítmico-lineales para cada fuente se efectúa un análisis de regresión sobre los datos. Esto será descrita en el próximo capítulo.

### 2.2.7 Mapas de Riesgo Sísmico.

Para desarrollar un mapa de Riesgo Sísmico, se combina toda la información anterior sobre la localización de la fuente y la recurrencia de los eventos para cada fuente, junto con la relación de atenuación que se usará en el modelo llamado, relación de Esteva (1973) dada por:

$$a = \frac{500 e^{0.8M}}{(R_H + 40)^2}$$

donde:

$a$  significa la aceleración pico de la superficie de la tierra.

$M$  significa la magnitud de Richter.

$R_H$  significa la distancia de la fuente al sitio de registro.

Según Kiremidjian, et al (1977), "Puesto que no hay disponibles para la región de Guatemala ningún registro para fuertes movimientos de eventos sísmicos ó registros de alta amplitud del acelerógrafo, no fue posible ajustar la relación de Esteva o de obtener la relación de atenuación específica para Guatemala."

Toda la información sobre registros del acelerógrafo junto con la localización de la fuente y la profundidad focal sirven para calcular las distribuciones de probabilidad acumulada de la aceleración pico de la superficie de la tierra en una región determinada, las cuales aparecerán en el próximo capítulo.

"Solo algunos pocos acelerogramas de muy bajas amplitudes de aceleración están disponibles para Guatemala y por lo tanto son difícilmente suficientes para determinar las características de atenuación en Guatemala".

En adición, al mapa de riesgo sísmico, es necesario obtener las distribuciones acumuladas de probabilidad para las ciudades de un país ó región geográfica previamente definida.

Es importante saber que la aceleración pico de la superficie

es uno de los parámetros para representar la severidad de los eventos sísmicos. La alta sismicidad de una región está reflejada por los altos valores de la aceleración pico de la superficie de la tierra, la cual se debe a su vez a la gran magnitud de los eventos.

Es necesario comprender la importancia del análisis de riesgo sísmico para Guatemala, o para cualquier país. Riesgo sísmico se define como: "Consecuencias esperadas de un evento sísmico futuro".

Las consecuencias ya son del todo conocidas por los habitantes que vivimos el terremoto del 4 de febrero de 1976. Es por ello, que los principios de predicción probabilística son esenciales para el análisis de riesgo sísmico y para la elaboración "completa" de un mapa de riesgo sísmico que sirva para reducir el peligro y para planificar la prevención con el objeto de reducir al máximo la pérdida de vidas y propiedades en un país.

Finalmente, en el estudio de Kiremidjian, et al (1977) se aclara que debe combatirse la variabilidad de la localización epicentral que depende de la estación de registro de datos. En los casos en los que, la localización epicentral o la mag

nitudo de Richter faltan se ignora el evento. Para que la información esté completa, debe contener el tiempo de la ocurrencia para un evento sísmico dado, la localización epicentral, la profundidad al hipocentro y la magnitud de Richter. También es deseable obtener los registros de movimientos fuertes del acelerógrafo y "toda" la información de como se atenúa la energía de la fuente en un lugar.

El registro de eventos sísmicos, ha ido en aumento en Guatemala, porque se han venido implementando aparatos más precisos capaces de efectuar registros faltantes, no como podría pensarse fácilmente, que los sismos van en aumento cada año en nuestro país.

CAPITULO III  
EL RIESGO SISMICO DE GUATEMALA  
Y EL MODELO DE POISSON.

- 3.1 Introducción.
  - 3.1.1 Modelo Sísmico.
- 3.2 Relaciones de Recurrencia Logarítmico-Lineales.
- 3.3 Mecanismos de las Fuentes.
  - 3.3.1 Fuente Puntual.
  - 3.3.2 Fuente de Línea.
  - 3.3.3 Fuente de Area.
- 3.4 Aceleración Pico de la Tierra en su Sitio.
  - 3.4.1 Relación de atenuación de la aceleración pico de la tierra.
  - 3.4.2 Fuente puntual.
  - 3.4.3 Fuente de Línea.
  - 3.4.4 Fuente de área.
- 3.5 Función acumulativa de distribución de la aceleración pico de la tierra.

### 3.1 Introducción.

Como se mencionó en el capítulo II, a la ocurrencia de eventos sísmicos, puede aplicársele la ley de probabilidad de Poisson.

Para eventos que satisfacen las suposiciones explicadas en el párrafo 2.1, la ley de Poisson se puede escribir de acuerdo a (1-3) como:

$$P(n, \lambda t) = P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (3-1)$$

donde:

$P(n, \lambda t)$ : probabilidad de tener  $n$  eventos en un período de tiempo  $t$ .

$n$  : número de eventos

$\lambda$  : razón de ocurrencia media por unidad de tiempo.

Los parámetros más comunmente utilizados, que representan la severidad de los eventos sísmicos son: la Intensidad Modificada de Mercalli, la magnitud de Richter y la aceleración pico de la superficie de la tierra.

Según Kiremidjian, et al (1977) la intensidad modificada de

Mercalli (MM) es una escala subjetiva del daño en el lugar, que puede ser útil para determinar el potencial del daño futuro en una región; sin embargo, no puede relacionarse a las características de respuesta estructural para propósitos de análisis y diseño. Por esta razón, los datos de intensidad MM serán utilizados solo cuando puedan traducirse a la magnitud Richter o a la aceleración pico de la superficie de la tierra.

Los ingenieros estructurales sísmicos, consideran como uno de los parámetros que representan el movimiento de la superficie de la tierra y tal vez el de mayor importancia, a la llamada aceleración pico de la superficie de la tierra.

La utilizan frecuentemente en el análisis y diseño de estructuras, y será empleada en este estudio como uno de los parámetros más importantes para determinar las cargas sísmicas.

Actualmente, se utilizan también otros parámetros de medida de carga sismo-resistente, tales como la raíz cuadrada media del movimiento de la corteza de la tierra, la llamada caída de esfuerzo y el momento sísmico según D. M. Boore (1977).

En el estudio de Kiremidjian et al (1977) las dos fuentes de información consideradas para la adquisición de los datos son:

- 1) El archivo de datos del National Earthquake Information Service de Colorado (NEIC) y el National Ocean Survey (NOAA) que contienen registros de eventos sísmicos ocurridos desde Enero de 1900 hasta agosto de 1973 y referido como Archivo de Datos 1.
- 2) Los datos preliminares de epicentros del National Earthquake Information Service de Colorado (NEIC) y el United States Geodetic Service (USGS) cubriendo el período de septiembre de 1973 a febrero de 1976 y referido como el Archivo de Datos 2.

Usando ambos archivos, el período de tiempo de los datos es de 75 años para Guatemala.

En adición, los eventos reportados por el Boletín de la Sociedad Sismológica de Norteamérica y el Observatorio Meteorológico de Guatemala, fueron usados para verificar la completitud de los datos.

La información contenida en los archivos, incluye el tiempo de ocurrencia para un evento sísmico dado, la localización epicentral, la profundidad al hipocentro y la magnitud. Además, es necesario que todos los datos estén expresados en términos de un solo parámetro de magnitud.

Según la obra citada, Guatemala está dividida en las siguientes regiones de actividad tectónica:

- (1) La zona de Benioff.
- (2) Las zonas de la falla del Motagua y Polochic.
- (3) La línea de volcanes del noroeste al sureste.
- (4) La zona de fallas cortas poco profundas, en las inmediaciones de la ciudad de Guatemala.
- (5) La plataforma de Yucatán.

Tomando en cuenta estas 5 regiones, el número total de eventos sísmicos 1153 fué dividido en 18 fuentes de línea. La tabla (3-2) identifica las fuentes, el número de eventos y la profundidad focal de cada fuente.

Según los autores citados, la localización de las fuentes se hace usando la posición hipocentral registrada de tiempos pasados para el período de tiempo de los registros.

Luego, la distribución espacial de los hipocentros es dividida en diferentes fuentes como una función de sus formas y sismicidad (definida como el número de ocurrencias por unidad de área o unidad de longitud).

### 3.1.1 Modelo Sísmico

En los datos disponibles actualmente, la medida de pérdida de energía más comunmente usada es la magnitud de Richter. En este modelo, la sismicidad de las fuentes se describe por la probabilidad de generar un evento mayor que una magnitud dada y no por la distribución sobre todos los eventos.

Asumiendo que las ocurrencias de eventos sísmicos forman un proceso de Poisson con una razón media de ocurrencia que depende de la magnitud, se obtiene una distribución sobre el número de ocurrencias para un período de tiempo dado y para una fuente dada.

La suposición sobre independencia espacial y temporal es verificada por los datos y es una práctica común aceptada en sismología.

Dada la ocurrencia de eventos sísmicos se determina una dis

tribución de sus magnitudes. Entonces se puede calcular la probabilidad correspondiente a cada magnitud con un ensayo de Bernoulli, donde el resultado éxito será un evento de la magnitud considerada y el de cualquier otra magnitud será fracaso.

Por lo tanto, dado que ocurrirán  $N$  eventos sísmicos ¿Cuál es la probabilidad de que habrán  $0, 1, 2, \dots, N$  eventos de una magnitud dada?. Combinando aquellas distribuciones binomiales condicionadas con la distribución de ocurrencias de Poisson, se obtiene una distribución de ocurrencias para cada magnitud.

TABLA 3-1

Datos de terremoto clasificados de acuerdo a la profundidad del hipocentro.

<u>Number of Earthquakes</u>	<u>Depth Range (km)</u>
81	0 - 9
37	10 - 19
34	20 - 29
298	30 - 39
53	40 - 49
65	50 - 59
116	60 - 69
87	70 - 79
72	80 - 89
60	90 - 99
63	100 - 109
39	110 - 119
27	120 - 129
18	130 - 139
13	140 - 149
18	150 - 159
11	160 - 169
8	170 - 179
6	180 - 189
10	190 - 199
20	200 - 219
7	220 - 239
5	240 - 259
4	260 - 279
1	280 - 299

Tomado de "Seismic Hazard Mapping for Guatemala"  
Kiremidjian, Shah, Lubetkin (1977)

TABLA 3-2  
FUENTES SISMICAS PARA GUATEMALA

SOURCE	NUMBER OF EVENTS	NAME OF SOURCE	DEPTH (km)
S1	56	Motagua	33
S2	16	Polochic	40
S3	31	Line of Volcanoes	30
S4	67	Pacific Coastline	30
S5	19	Pacific Coastline	34
S6	5	Near Mexico Border	30
S7	7	Near Mexico Border	35
S8	16	Mixco	30
S9	17	"Mexico"	60
S10	10	"Mexico"	75
S11	7	Jocotan	30
S12 - B1	244	Benioff 1	30
S13 - B2	87	Benioff 2	50
S14 - B3	192	Benioff 3	70
S15 - B4	196	Benioff 4	90
S16 - B5	111	Benioff 5	130
S17 - B6	35	Benioff 6	180
S18 - B7	37	Benioff 7	225

Tomado de "Seismic Hazard Mapping for Guatemala"  
de Kiremidjian, Shah y Lubetnik, (1977)

TABLA 3-3  
 INFORMACION DE FUENTE DE LINEA

Source	$\alpha_1'$	$\beta_1$	$\alpha_2'$	$\beta_2$	RM <sub>max</sub> (recorded)	RM <sub>max</sub> (cutoff)	Length (degrees)	RMBK
S1	-0.0632	-0.7955			7.5	8.5	4.84	
S2	-0.4323	-0.7961			6.0	8.0	3.52	
S3	-0.2486	-0.7211			6.8	8.0	2.72	
S4	-0.0023	-0.5579	10.4009	-2.1618	7.3	8.0	2.68	6.49
S5	2.1556	-1.3430			5.0	6.0	1.84	
S6	-0.4873	-0.6460			5.7	6.5	0.79	
S7	-0.0187	-0.6363			6.5	7.0	0.73	
S8	1.2284	-0.5930			6.1	7.4	0.30	
S9	-0.8131	-0.4753	1.0776	-0.8249	7.5	8.0	1.87	5.41
S10	-1.7146	-0.3591	5.1519	-1.5889	6.5	7.5	2.36	5.58
S11	-0.7026	-0.5397			6.3	7.5	1.12	
S12 - B1	2.9900	-1.1107			7.4	8.5	6.34	
S13 - B2	0.6477	-0.8098	4.3405	-1.6915	6.3	8.5	7.15	4.19
S14 - B3	1.8929	-0.9447	14.1711	-2.9741	6.8	8.5	7.39	6.05
S15 - B4	1.0108	-0.6659	3.4927	-1.1340	8.3	8.6	7.72	5.30
S16 - B5	0.1986	-0.6222	2.5188	-1.0979	8.4	8.6	7.83	4.88
S17 - B6	-0.7732	-0.6795	8.1302	-2.2485	6.5	8.5	8.02	5.67
S18 - B7	-0.8487	-0.6290	3.0325	-1.2867	6.9	8.5	8.02	5.90

Tomado de "Seismic Hazard Mapping for Guatemala". Kiremidjian, Shah y Lubetnik, (1977).

### 3.2 Relaciones de Recurrencia Logarítmico-Lineales.

Es necesario establecer relaciones de recurrencia relacionadas con la magnitud de Richter, las características de la fuente y el período de tiempo para adecuar perfectamente los datos al modelo de Poisson.

Se asumirá para todas las fuentes una relación de recurrencia logarítmico-lineal según fuera propuesta por Kiremidjian, Shah y Lubetkin (1977).

Para obtener las relaciones de recurrencia logarítmico-lineales para cada fuente, se efectúa un análisis de regresión sobre los datos para cada fuente. Las relaciones de recurrencia logarítmico-lineales son de la forma:

$$\ln[N(M)] = \alpha + \beta M \quad (3-2)$$

donde:

M: magnitud de Richter

N(M): número de ocurrencias sísmicas de magnitud mayor que M

$\alpha, \beta$ : constantes de regresión.

Las relaciones de recurrencia para cada fuente pueden obte--

nerse ajustando una línea de regresión a los datos de la Tabla 3-3.

Estas relaciones de recurrencia dan el número medio de eventos de magnitud mayor que  $M$  en términos de la fuente del sismo y el período de tiempo de los datos.

La magnitud máxima de Richter fue asignada para cada fuente, considerando el mayor evento sísmico asociado a cada fuente, la longitud de la fuente y el sistema de falla al cual éste podría pertenecer.

$\alpha$  es una medida del número de eventos por arriba de la magnitud o para una fuente dada y  $\beta$  es una medida de la severidad sísmica para una fuente dada. Cuanto mayor es el valor negativo de  $\beta$ , menor es la severidad sísmica.

La relación de recurrencia (3-2) se puede expresar en su forma general como:

$$N(M) = \phi(M, A, T) \quad (3-3)$$

donde:

$N(M)$ : número de ocurrencias por arriba de la magnitud  $M$ .

$M$ : magnitud de Richter

A: característica de la fuente

(Área para una fuente de área y longitud para una fuente de línea).

T: período de tiempo para la base de datos.

La ecuación (3-2) es normalizada con respecto al período de tiempo de los datos (en este caso de 75 años) y a la longitud de la fuente, así:

$$N'(M) = N(M)/AT \quad (3-4)$$

$N'(M)$  es el número medio normalizado de eventos por arriba de la magnitud  $M$  para una unidad de tiempo (1 año) y una unidad de área o unidad de longitud y los otros símbolos tienen el significado ya señalado.

La misma fórmula (3-4) puede utilizarse para el caso donde se usa la longitud de la fuente de línea cambiando  $A$  por  $L$ .

Si se utilizan las relaciones (3-2) y (3-4) se obtiene:

$$\ln N'(M) = \alpha' + \beta M \quad (3-5)$$

donde:

$\alpha' = \alpha - \ln(AT)$  para fuente de Área

$\alpha' = \alpha - \ln(LT)$  para fuente de Línea.

Para muchas fuentes, una única línea de regresión da resultados erróneos porque la interpolación de la línea más allá de la extensión de los datos indica ocurrencias no razonables de alta magnitud. Cuando existe tal problema, deben ajustarse dos líneas de regresión a los datos y un valor de magnitud geológicamente consistente como lo muestran las figuras 3-1 a 3-18.

Para el caso de algunas fuentes donde la relación es bilineal (dos líneas descritas por  $\alpha_1, \beta_1$  y  $\alpha_2, \beta_2$ ) puede verse la tabla 3-3.

Las dos líneas que describen la relación de recurrencia para una fuente dada son:

$$\ln N'(M) = \alpha_1' + \beta_1 M \quad 0 \leq M \leq M_1$$

$$\ln N'(M) = \alpha_2' + \beta_2 M \quad M_1 \leq M \leq M_2$$

De la ecuación (3-5) se deduce que:

$$N'(M) = \exp(\alpha_j' + \beta_j M) \quad (3-6)$$

De la ecuación (3-1) sustituyendo  $\lambda t$  por la ecuación (3-6) se sigue que:

$$P(n, \lambda t) = \frac{\exp(-\exp(\alpha_j' + \beta_j M t)) (\exp(\alpha_j' + \beta_j M t) t)^n}{n!} \quad (3-7)$$

en este caso  $\lambda$  es la razón de ocurrencia media por unidad de tiempo.

La ecuación (3-7) da la probabilidad de observar  $n$  eventos por arriba de la magnitud  $M$  en un período de tiempo  $t$ , basado en la historia sísmica de una fuente dada.

La tabla 3-3 muestra los valores de  $\alpha'$  y  $\beta$  para cada fuente y la magnitud de corte superior.

La tabla da los valores de  $\alpha'$  y  $\beta$  normalizados con respecto a los grados de latitud y longitud así como  $RM_{bk}$  que es la magnitud de Richter donde cambia la pendiente de la líneas de recurrencia.

Tomado de "Seismic Hazard Mapping for Guatemala"  
Kiremidjian, Shah y Lubetnik, (1977)

FIGURA 3-1  
GRAFICA DE REGRESION  
FUENTE: S1

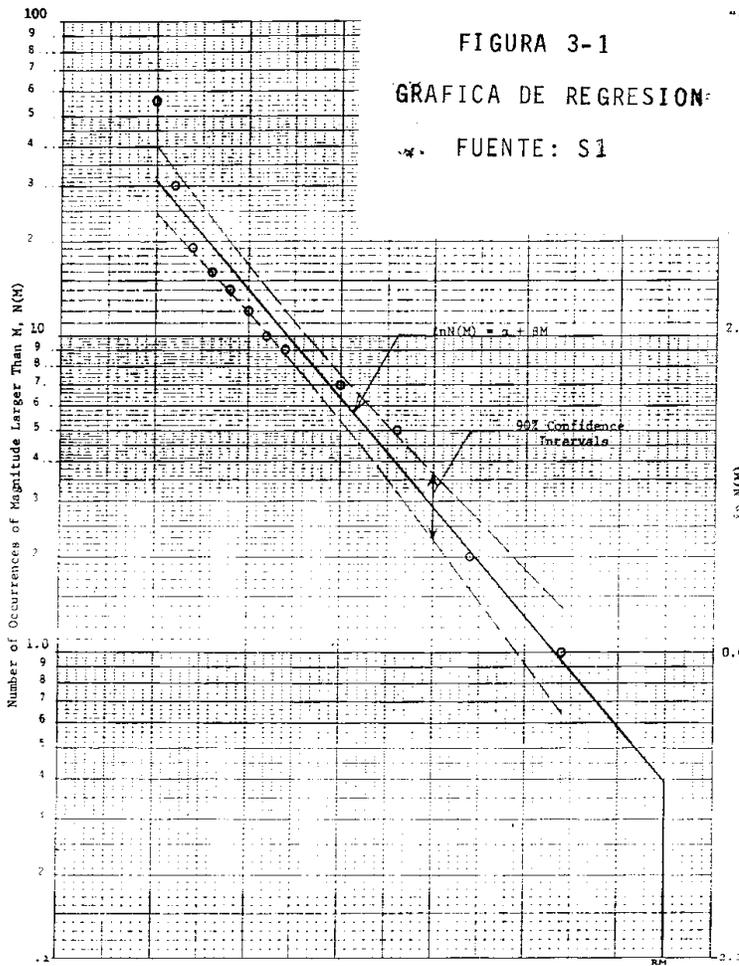
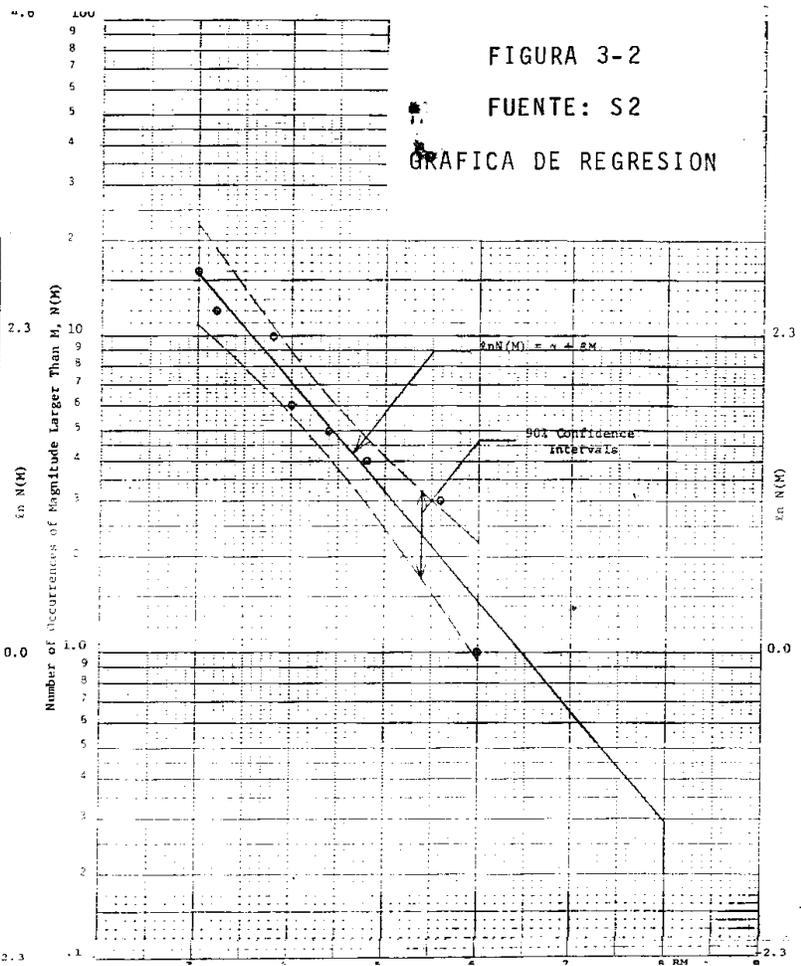
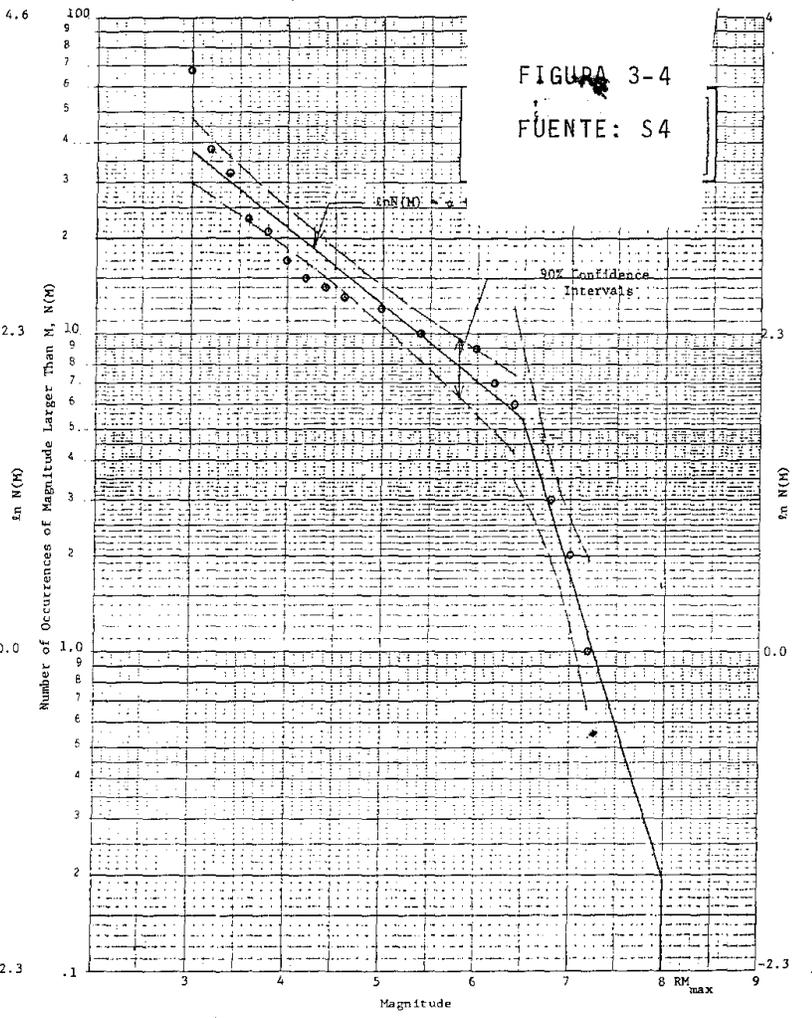
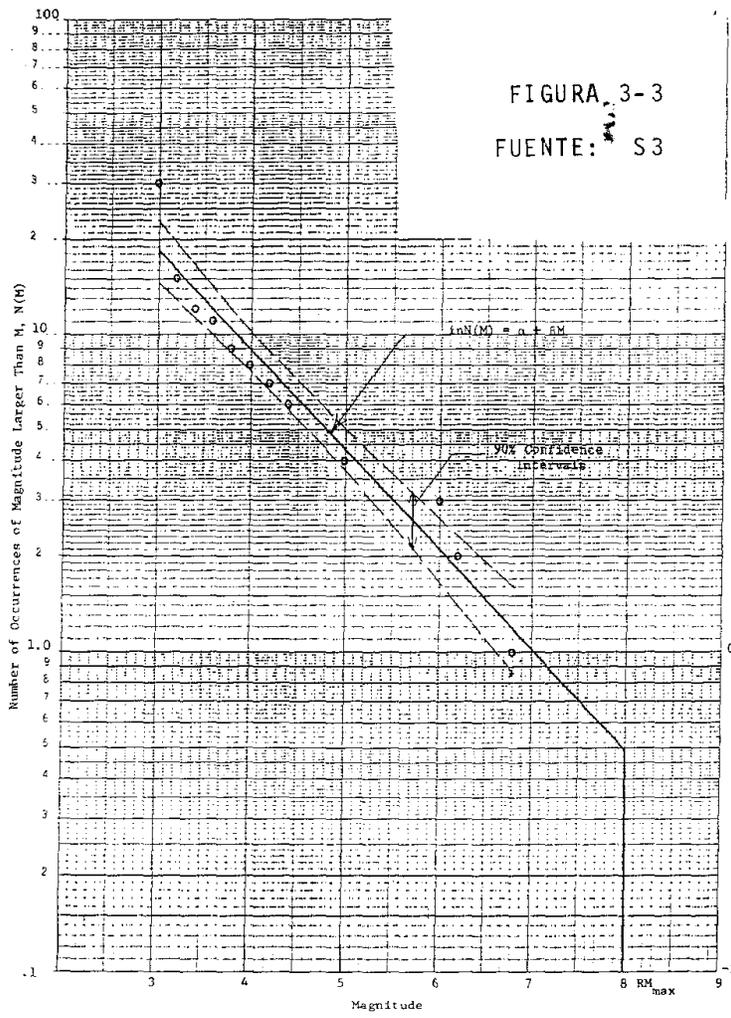
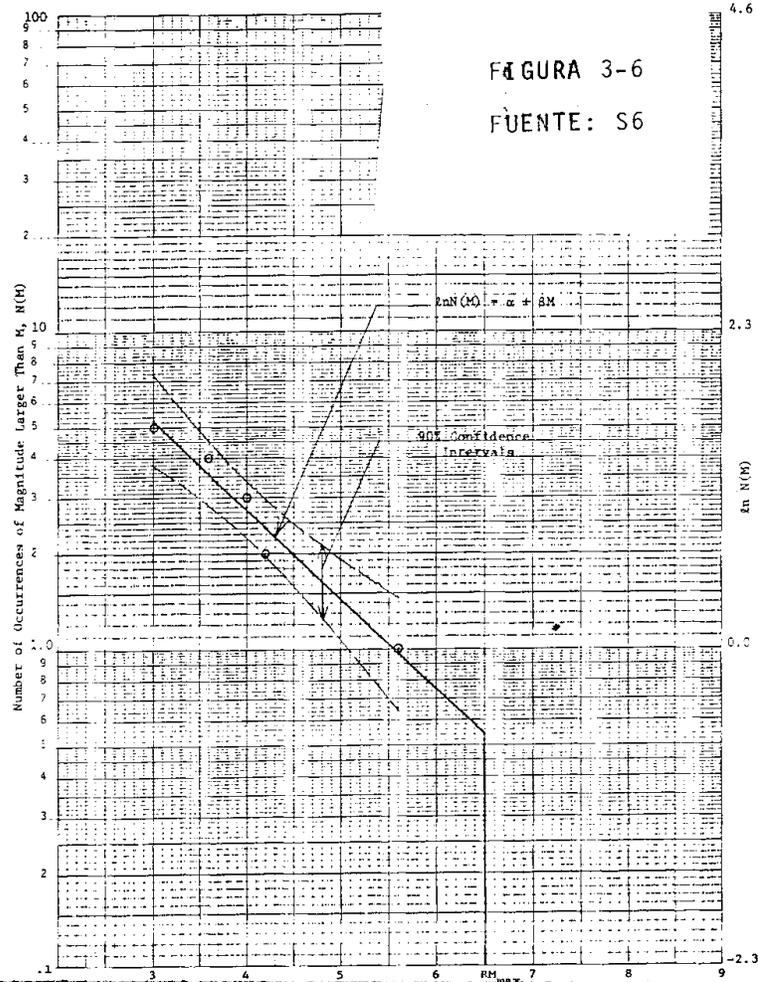
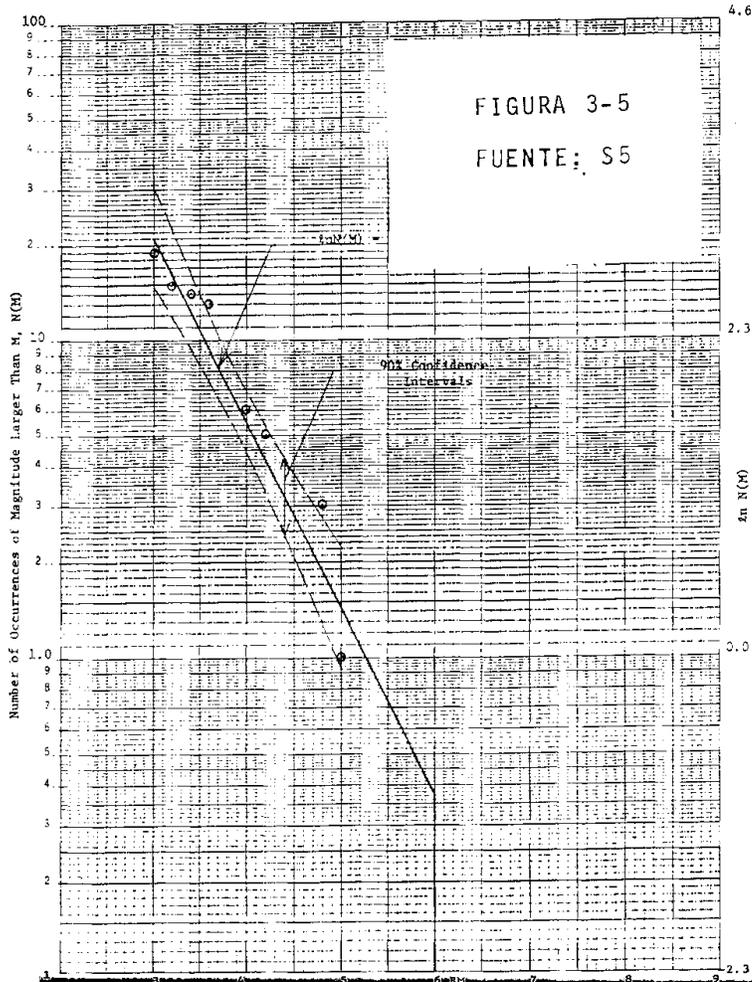


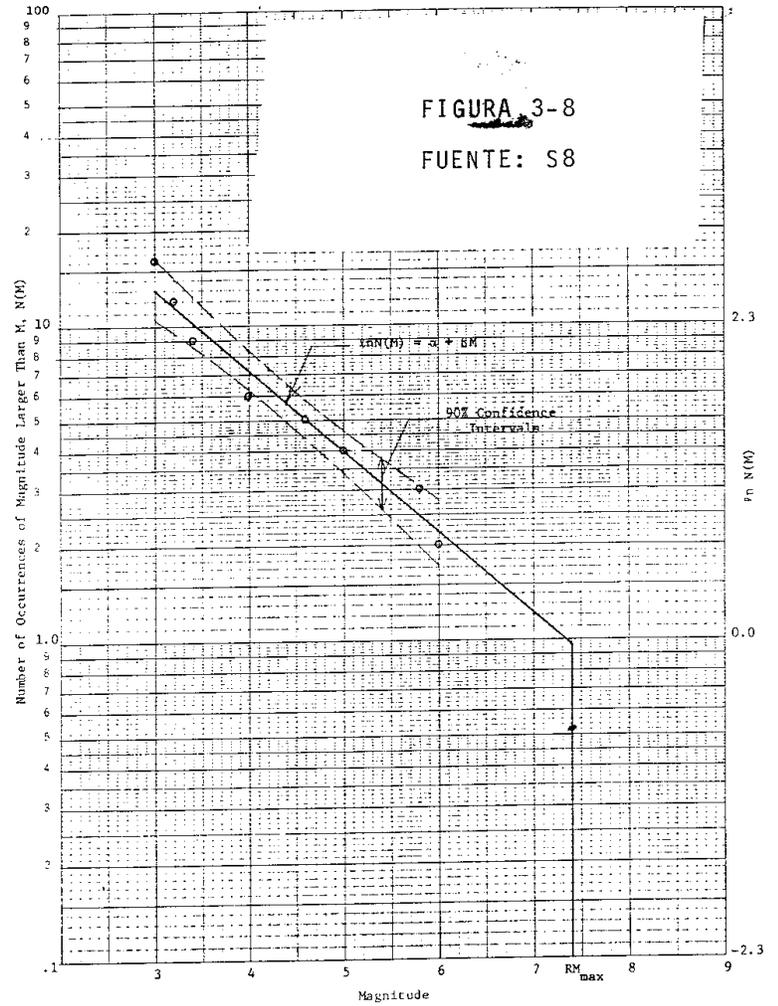
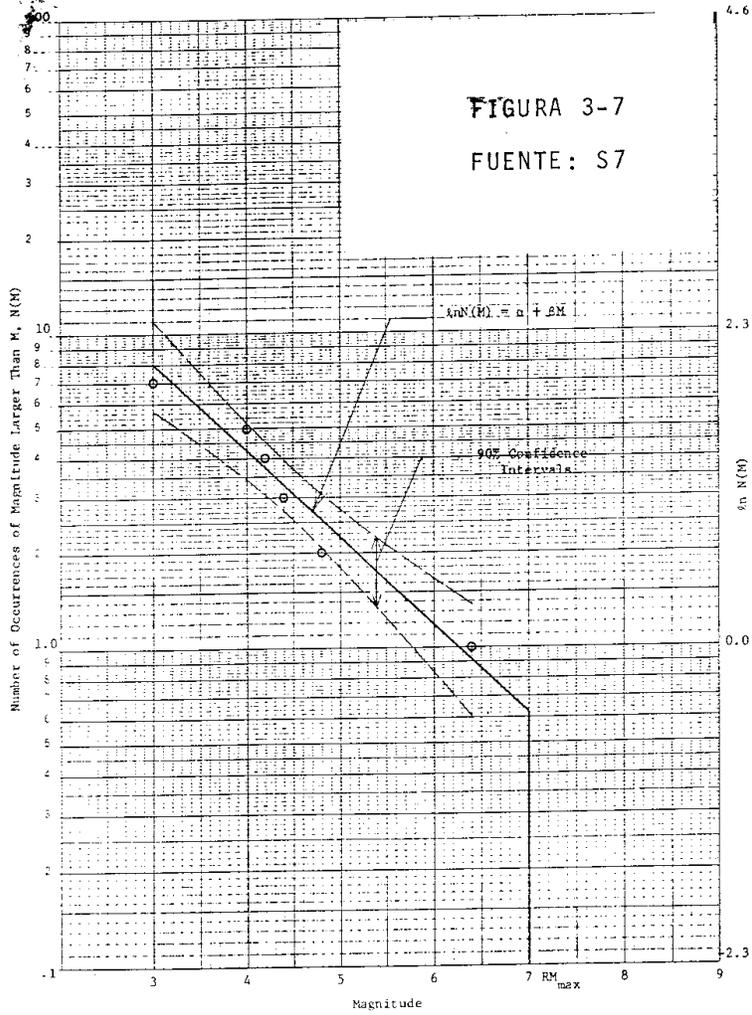
FIGURA 3-2  
FUENTE: S2  
GRAFICA DE REGRESION





72





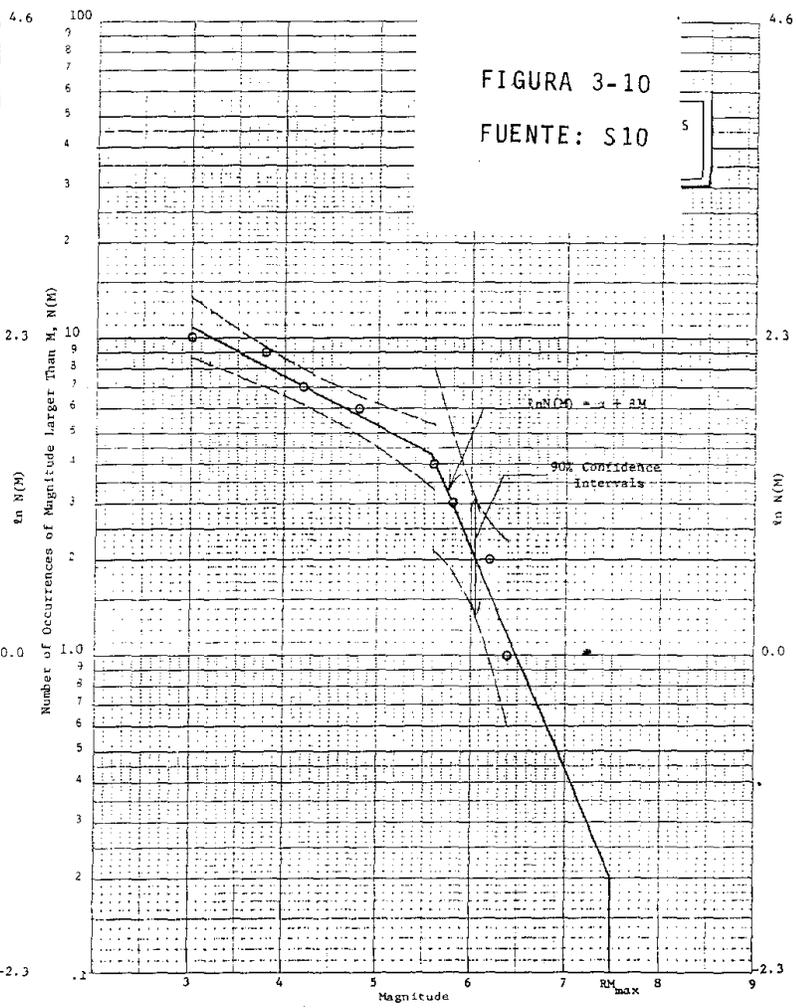
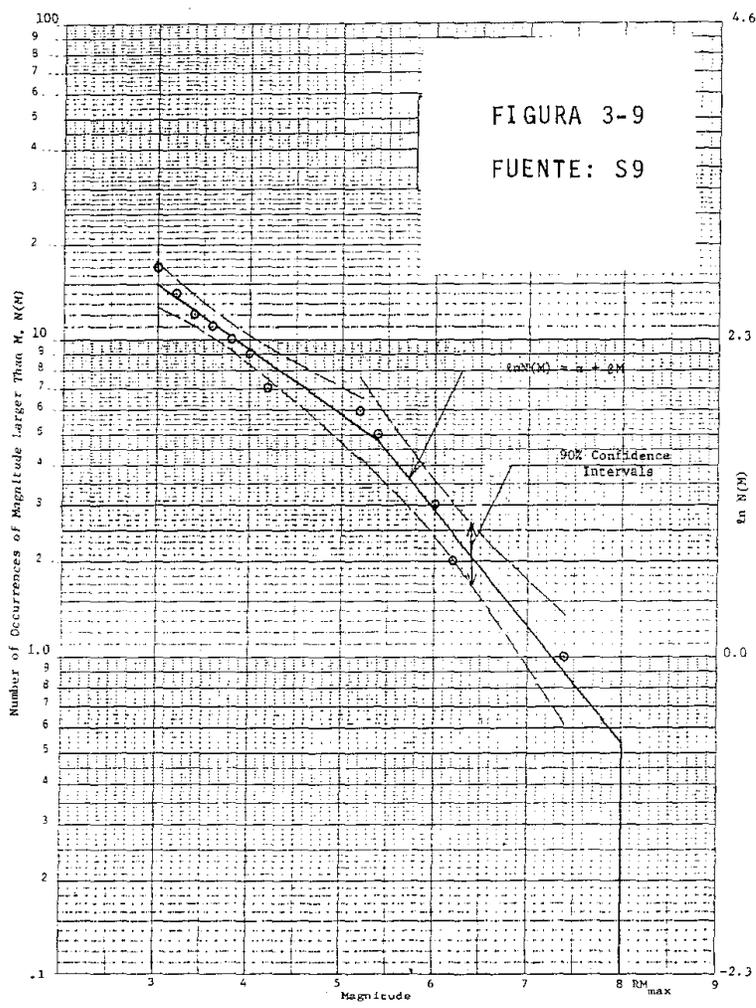


FIGURA 3-11  
FUENTE: S11

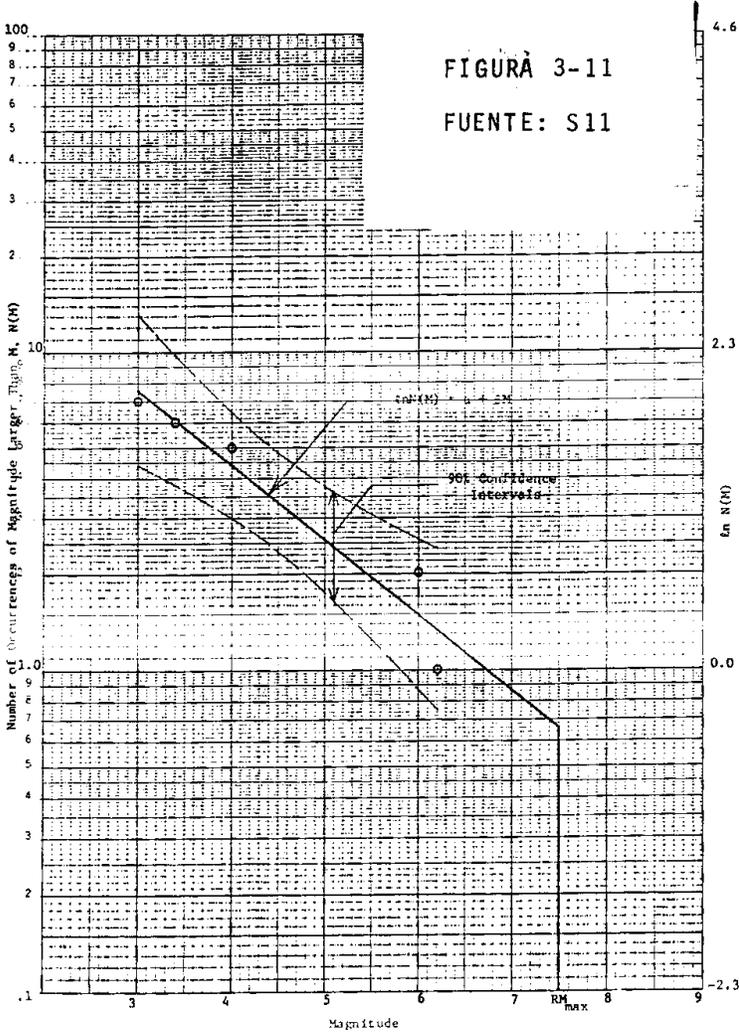
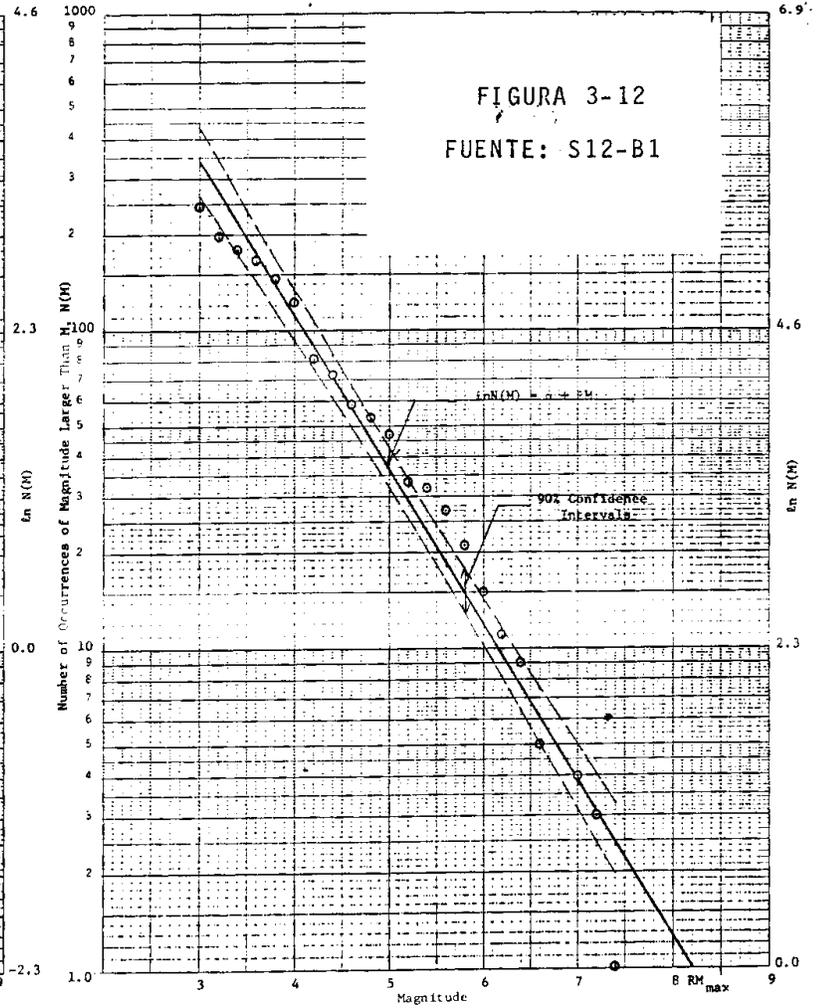


FIGURA 3-12  
FUENTE: S12-B1



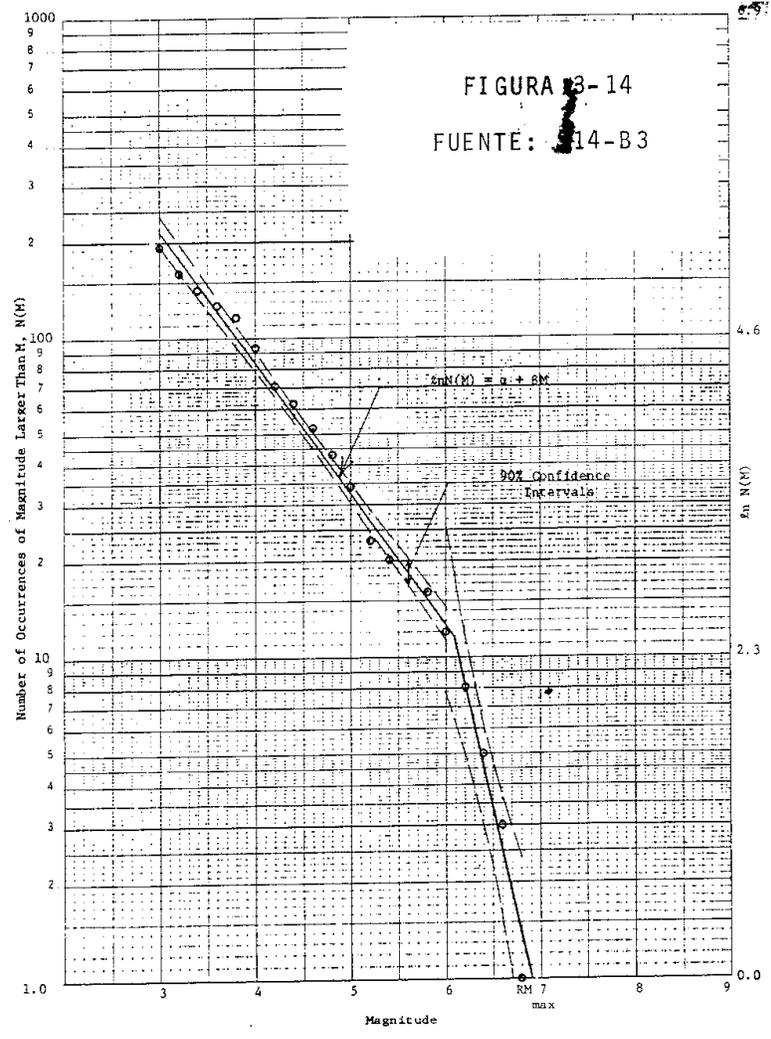
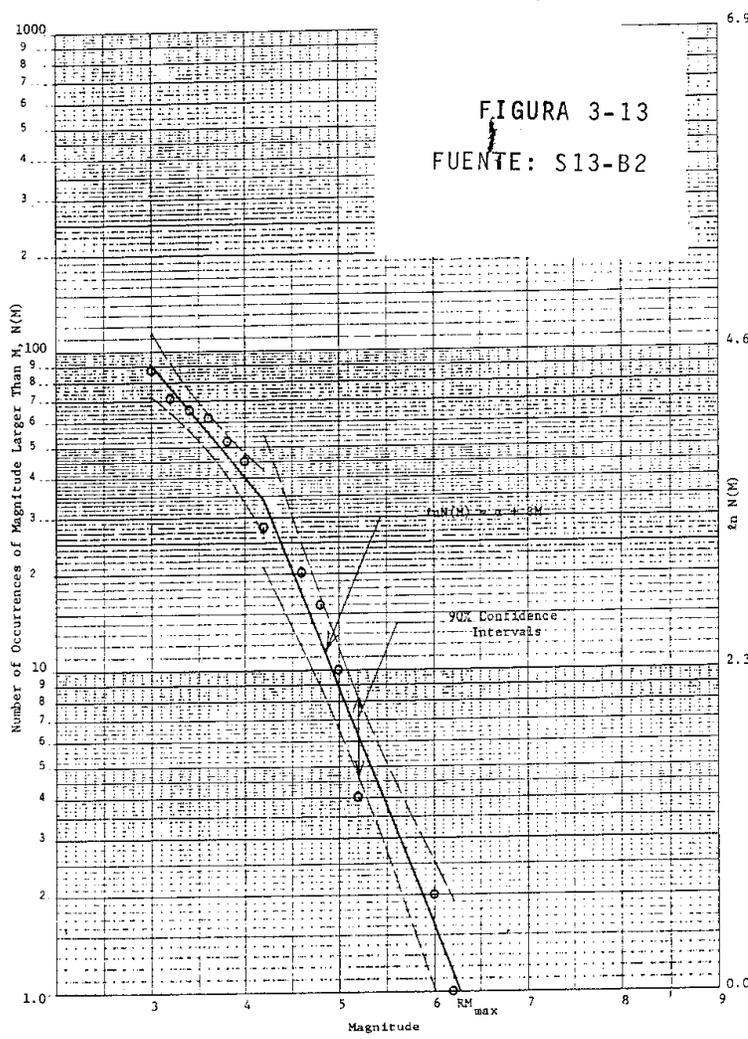


FIGURA 3-15  
FUENTE: S15-B4

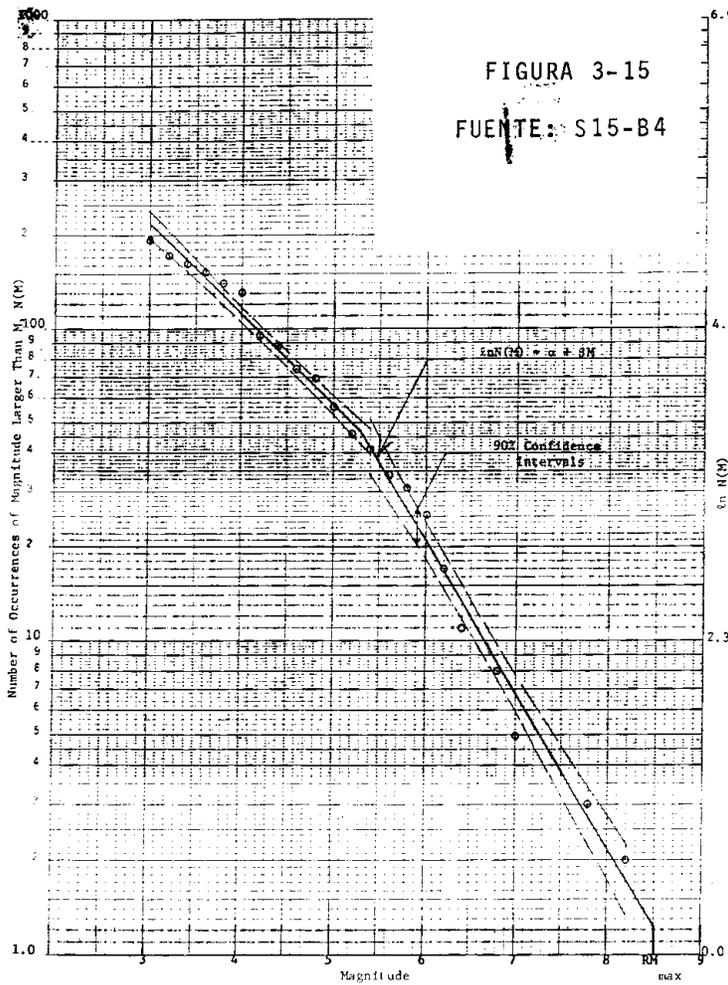


FIGURA 3-16  
FUENTE: S16-B5

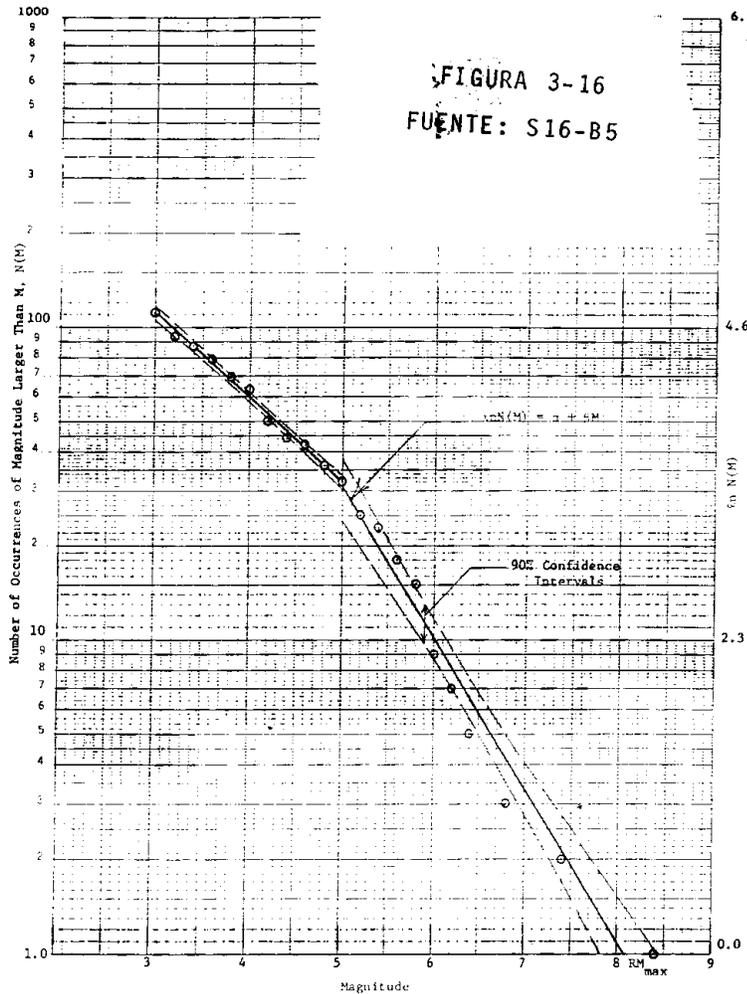
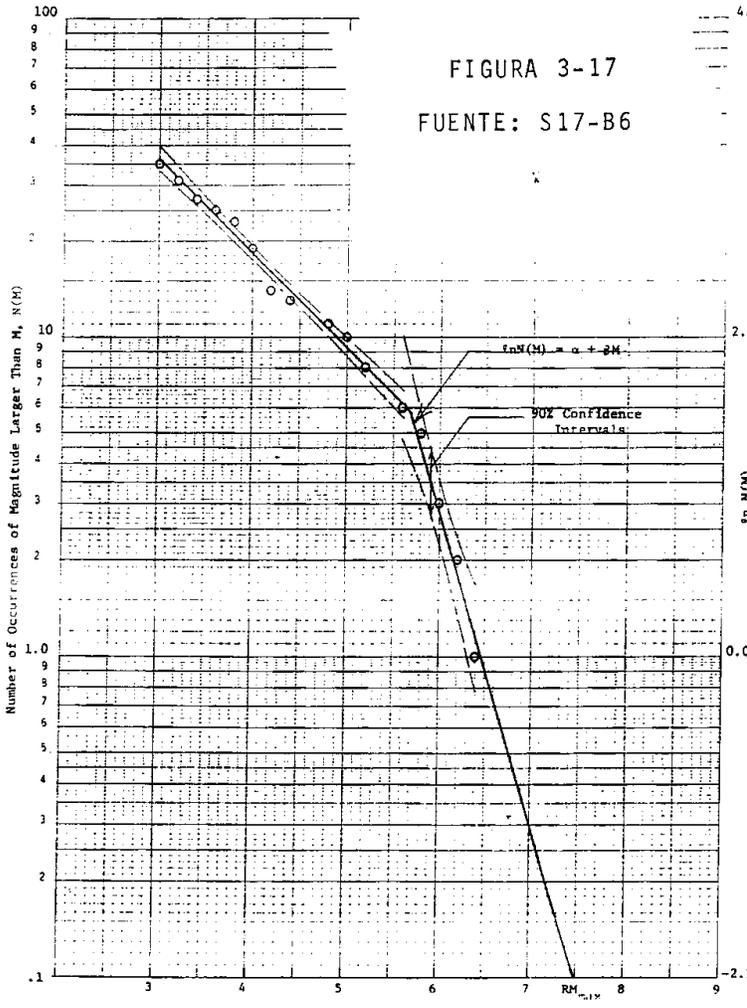
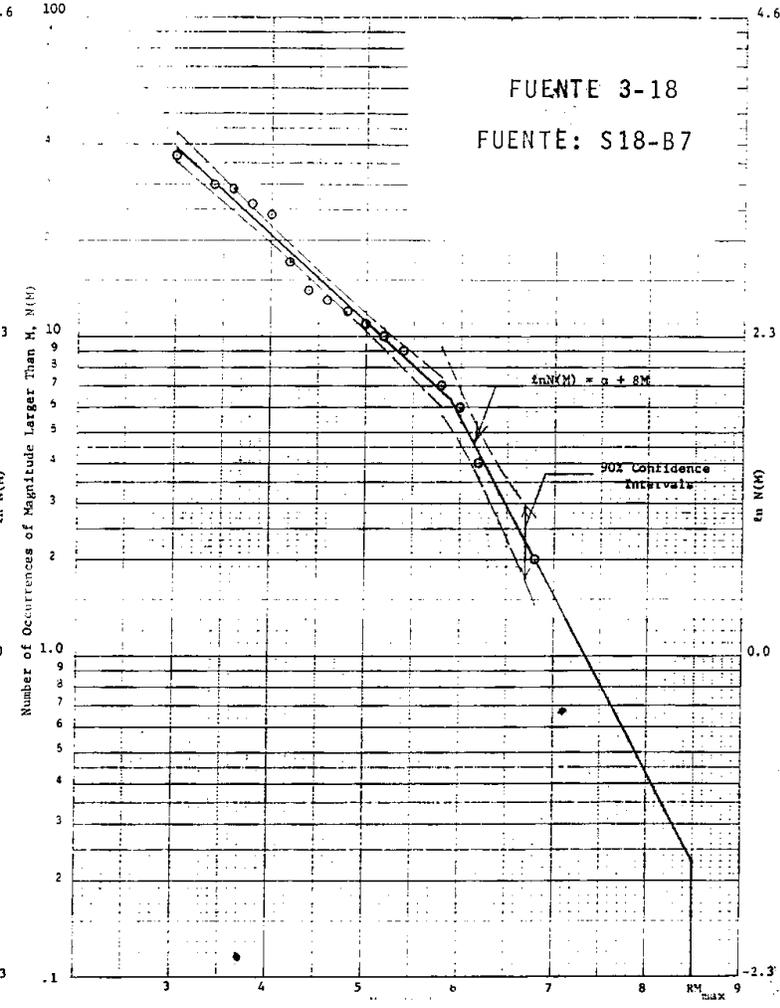


FIGURA 3-17  
FUENTE: S17-B6



FUENTE 3-18  
FUENTE: S18-B7



### 3.3 Mecanismos de las Fuentes.

Como fuera mencionado en el Capítulo II, existen tres tipos de fuentes para representar la sismicidad de una región: la fuente puntual, la fuente de línea y la fuente de área.

Aún cuando para Guatemala solo fueron consideradas fuentes de línea (Kiremidjian et al (1977)), se definirán los tres mecanismos de fuente para conservar la generalidad y la completitud de este trabajo.

#### 3.3.1 Fuente puntual.

Para este tipo de fuente, todas las ocurrencias (pasadas y futuras) suceden en un solo punto.

La relación de recurrencia puede ser normalizada con respecto al tiempo T como sigue:

$$N'(m) = \frac{N(m)}{T} \quad (3-8)$$

Sustituyendo el valor de  $N'(m)$  en la ley de Poisson, la ecuación (3-7) se transforma en:

$$P_n(M > m, t) = \frac{\exp[-N'(m)t] [N'(m)t]^n}{n!} \quad (3-9)$$

donde la notación:

$P_n(M > m, t)$  indica la probabilidad de que habrán  $n$  eventos de magnitud Richter mayor que  $m$  en un período de tiempo  $t$ .

Para propósitos de ingeniería, es de interés primordial determinar la probabilidad de que al menos un evento sea mayor que  $m$  en un período de tiempo  $t$ . La probabilidad está dada en este caso por:

$$P \text{ (al menos un evento de magnitud } M > m \text{ en tiempo } t) \\ = 1 - P \text{ (ningún evento de magnitud } M < m \text{ en un tiempo } t)$$

De aquí y de la ecuación (3-9) se sigue que:

$$P \text{ (al menos un evento de magnitud } M > m \text{ en un tiempo } T) \\ = 1 - \exp[-N^*(m)t] \quad (3-10)$$

#### Ejemplo:

En el estudio de Kiremidjian et al (1977) no aparecen datos tabulados para fuente puntual. Por esa razón, se menciona un ejemplo descriptivo.

Por ejemplo, puede ser interesante para un ingeniero determinar cual es la probabilidad de que se produzcan  $n$  sismos de

magnitud mayor que  $m$  en la región de Amatitlán, derivados de la actividad sísmica del volcán Pacaya. En este caso se usarán registros sísmicos durante un período de tiempo más o menos largo ( $T$ ) para poder determinar el número medio de eventos normalizados ( $N'(m)$ ) por arriba de la magnitud observada. Luego usando (3-9) el ingeniero puede determinar la probabilidad buscada para el tiempo que le sea útil ( $t$ ) o bien lo que le es más importante, la probabilidad de que ocurra al menos un evento de magnitud mayor que  $m$ , dado por la relación (3-10).

### 3.3.2 Fuente de Línea.

En el caso de una fuente de línea, se asume que los epicentros están situados a lo largo del patrón lineal de la falla. Para una fuente de línea de longitud  $L$  (donde  $L$  es la longitud de la falla) y datos para un período de tiempo  $T$ , la relación de recurrencia puede ser normalizada a:

$$N'(m) = \frac{N(m)}{LT} \quad (3-11)$$

Esta  $N'(m)$  puede sustituirse directamente en la ecuación (3-10) para obtener la probabilidad de ocurrencia de al menos un sismo de magnitud  $M > m$  en un tiempo  $t$ .

Ejemplo Numérico:

Es posible realizar este ejemplo debido a que Kiremidjian et al (1977), dan datos tabulados para 18 fuentes de línea.

Si se analiza la fórmula (3-6) para la fuente del Motagua (S1), según la tabla 3-2 hay 56 eventos registrados con magnitud máxima de Richter 7.5. Además, en la tabla 3-3 se leen los valores  $\alpha'$  y  $\beta$  normalizados, entonces:

$$\begin{aligned} N'(M) &= \exp(\alpha_1' + \beta_1 M) \\ &= \exp(-0.0632 + (-0.7955)M) \end{aligned}$$

Si  $n = 56$  y  $t = 10$  años.

Sustituyendo estos valores en la relación (3-9):

$$\begin{aligned} P_{56}(M > 7.5, 10) &= \{ \exp[-\exp(-0.0632 + (-0.7955(7.5))10)] \cdot \\ &\quad \cdot [-\exp(-0.0632 + (-0.7955(7.5)10))]^{56} \} \frac{1}{56!} \\ &= \frac{\exp[-\exp(-0.0632 - 5.9662)10] [-\exp(-0.0632 - 5.9662)10]^{56}}{56!} \\ &= \frac{\exp[-\exp(-6.02945)10] [-\exp(6.02945)10]^{56}}{56!} \end{aligned}$$

$$= \frac{\exp[-0.024] [-0.024]^{5.6}}{71,099,859.7}$$

$$= \frac{(.9762)(1.958)}{71,099,859.7} = 0.0000000267 = 0.00000267 \%$$

2) Calcular  $P_n(M > m, t)$  para la fuente Polochic (S2).

Según la tabla 3-2 hay 16 eventos registrados con magnitud máxima de Richter 6.0.

Además en la tabla 3-3 se leen los valores  $\alpha'$  y  $\beta$  normalizados, entonces:

$$N'(M) = \exp(\alpha_1' + \beta_1 M)$$

$$= \exp[-0.4323 + (-0.7961)(6.0)]$$

$$\text{Por (3-9) } P_{16}(M > 6, 10) =$$

$$= \{ \exp[-\exp(-0.4323 + (-0.7961)(6))10] \cdot$$

$$\cdot [-\exp(-0.4323 + (-0.7961)(6))10]^{16} \} \frac{1}{16!}$$

$$= \{ \exp[-\exp(-0.4323+(-4.77))10] \cdot$$

$$\cdot [-\exp(-0.4323+(-4.77))10]^{16} \} \frac{1}{16!}$$

$$= \frac{\exp[-\exp(-5.2023)10] [-\exp(-5.2023)10]^{16}}{16!}$$

$$P_{16}(M>6,10) = \frac{\exp[-0.055] [-0.055]^{16}}{2,092,279.13}$$

$$= \frac{(.946)(1.525)}{2,092,279.13}$$

$$= \frac{1.442}{2,092,279.13} = 0.00000066 = 0.000066 \%$$

3) Calcular  $P_n(M>m,t)$  para la zona Benioff (S12-B1) según tabla 3-2 hay 244 eventos con una magnitud máxima de Richter de 7.4.

$$\text{Por (3-6)} \quad N'(M) = \exp\alpha'_1 + \beta_1$$

$$= \exp(2.9900-1.1107(7.4))$$

donde  $\alpha'_1$  y  $\beta_1$  se leen de la tabla 3-3 si fijamos el tiempo futuro  $t=10$  años.

$$\begin{aligned}
P_{244}(M > 7.4, 10) &= \{ \exp[-\exp[2.9900 - 1.1107(7.4)10]] \cdot \\
&\quad \cdot [-\exp[-2.9900 - 1.1107(7.4)10]]^{244} \} \frac{1}{244!} \\
&= \frac{\exp[-\exp(2.9900 - 8.2191)10] [-\exp(2.9900 - 8.2191)10]^{244}}{244!} \\
&= \frac{\exp[-\exp(-5.2291)10] [-\exp(-5.2291)10]^{244}}{244!} \\
&= \frac{\exp[-0.005(10)] [-0.005(10)]^{244}}{244!} \\
&= \frac{\exp[-0.05] [-0.05]^{244}}{244!} \\
&= \frac{(0.951)(-0.05)^{244}}{244!} = 0.000000 = 0.0000 \%
\end{aligned}$$

Como podemos observar, en estos tres casos, la probabilidad de ocurrencia de eventos sísmicos por arriba de la magnitud dada (que fue la máxima observada para cada fuente) es muy pequeña, debido, precisamente a la magnitud dada como referencia ya que el tiempo es relativamente corto, ya que es de 10 años. Indudablemente, si la magnitud de referencia es

menor y el tiempo es más largo, la probabilidad de ocurrencia de los eventos es mucho mayor.

En todo caso, lo importante es que la distribución permite calcular el riesgo sísmico según las fuentes de procedencia de los eventos.

### 3.3.3 Fuente de área

Cuando los epicentros de terremotos del pasado, no están situados sobre una línea o cuando no hay información sobre localizaciones de falla, la fuente sísmica debe considerarse como una fuente de área. La fuente de área se puede aproximar por un círculo completo o cualquier sección de un círculo en el cual están dispersos los epicentros. En este caso, la relación de recurrencia es normalizada con respecto al área  $A$  y el tiempo  $T$  de la base del dato.

La ecuación (3-11) se transforma entonces a:

$$N'(m) = \frac{N(m)}{AT} \quad (3-12)$$

De nuevo, la probabilidad de que haya al menos un evento, debido a esta fuente de área, por arriba de la magnitud  $m$  en

un período de tiempo  $t$  está dada por la ecuación (3-10). Debe notarse que mientras la ecuación (3-10) tiene la misma forma para una fuente puntual, fuente de línea y fuente de área; en cada caso, el  $N'(m)$  normalizado tiene una interpretación diferente para una fuente de línea pues se trata con una unidad de longitud mientras que para una fuente de área se trata con una unidad de área.

Un ejemplo numérico para esta fuente se desarrolla más adelante en la sección 3.4.4.

### 3.4 Aceleración Pico de la Tierra en un Sitio.

Como se mencionó en el Capítulo II, el parámetro más comúnmente usado para describir la carga sísmica en un sitio dado es la aceleración pico de la tierra.

A fin de derivar la distribución de probabilidad de la aceleración pico de la superficie de la tierra en un sitio, para un período futuro de tiempo  $t$ , se requiere la siguiente información.

1. La formulación probabilística sobre la magnitud de Richter para la fuente como una función del tiempo futuro  $t$ .
2. La distancia de la fuente al sitio.
3. La atenuación de la aceleración pico de la tierra de la fuente al sitio.

El primer parámetro ya ha sido determinado en la sección precedente.

#### 3.4.1 Relación de Atenuación de la aceleración pico de la tierra.

Para la atenuación existen varias fórmulas, las cuales dan la relación entre la magnitud de Richter  $M$ , la distancia epicentral o distancia hipocentral y la aceleración pico de la tierra.

Debe recordarse que los modelos sísmicos son fenomenológicos, ésto es, son relaciones basadas en datos experimentales, de aquí que a medida que transcurre el tiempo, las fórmulas correspondientes van adaptándose mejor a los datos obtenidos.

Donovan (1974) ha resumido y comparado diez relaciones de atenuación. Estas relaciones aparecen en la Tabla 3-4 y sus gráficas correspondientes se muestran en la figura 3-19.

La mayor parte de las relaciones en la Tabla 3-4 se pueden escribir en la siguiente forma general:

$$a = \frac{b_1 \exp(b_2 m)}{(R_h + b_4)^{b_3}} \quad (3-13)$$

que corresponde a la relación de Esteva (1973) dada en el Capítulo II, aquí:

$a$ : aceleración pico de la tierra (APT) en  $\text{cm/seg}^2$

$R_h$ : distancia hipocentral en Km o millas de la fuente al sitio.

m: magnitud de Richter.

$b_1, b_2, b_3, b_4$  son constantes que dependen de la región y se han determinado experimentalmente.

La relación de Esteva (1973) se usa para relacionar la aceleración pico de la tierra a la magnitud como una función de la distancia.

Usando la forma general de la relación de atenuación dada por la ecuación (3-13) se puede obtener la distribución de probabilidad de la aceleración pico de la tierra para un sitio, debido a los tres tipos de fuentes sísmicas.

TABLA 3-4  
ECUACIONES DE ATENUACION

1. San Fernando Earthquake February 9, 1971	$y = 186206 R^{-1.83}$	
2. California Earthquakes	$y = \frac{981 y_o}{1 + \frac{R'}{h}}^2$	Blume (1965)
	where $\log y_o = -(\bar{b}+3) + 0.81m - 0.027m^2$	
	$\bar{b}$ is a site factor	
3. California Earthquakes	Graphical Presentation	Housner (1965)
4. California & Japanese	$y = \frac{5}{T_G} 10^{0.61m - P \log R + Q}$	Kanai (1966)
	where $P = 1.66 + \frac{3.60}{R}$	
	$Q = 0.167 - \frac{1.83}{R}$	
	$T_G$ = fundamental period of site	
5. Cloud (1963)	$y = \frac{6.77 e^{1.64m}}{1.1e^{1.1m} + R^2}$	Milne & Davenport (1969)
6. Cloud (1963) Housner (1962)	$y = 1230 e^{0.8m} (R+25)^{-2}$	Esteva (1970)
7. U.S.C. & G.S.	$\log_{10} y = 6.5 - 2 \log_{10} (R'+80)$	Cloud & Perez (1971)
8. 11 Selected Records	Graphical Presentation	Schnabel & Seed (1972)
9. 303 Instrumental Values	$y = 1300 e^{0.67m} (R+25)^{-1.6}$	--
10. Western U. S. Records	$y = 18.9 e^{0.8m} (R^2+400)^{-1}$	--

$y$  is  $\text{cm/sec}^2$   
 $R$  is kilometers (distance to causative fault)  
 $R'$  is miles (epicentral distance)  
 $h$  is miles (focal depth)  
 $m$  is magnitude

\* Taken from Donovan 1974

Tomado de "Seismic Hazard Mapping for Guatemala"  
Kiremidjian, Shah, Lubetnik (1977).

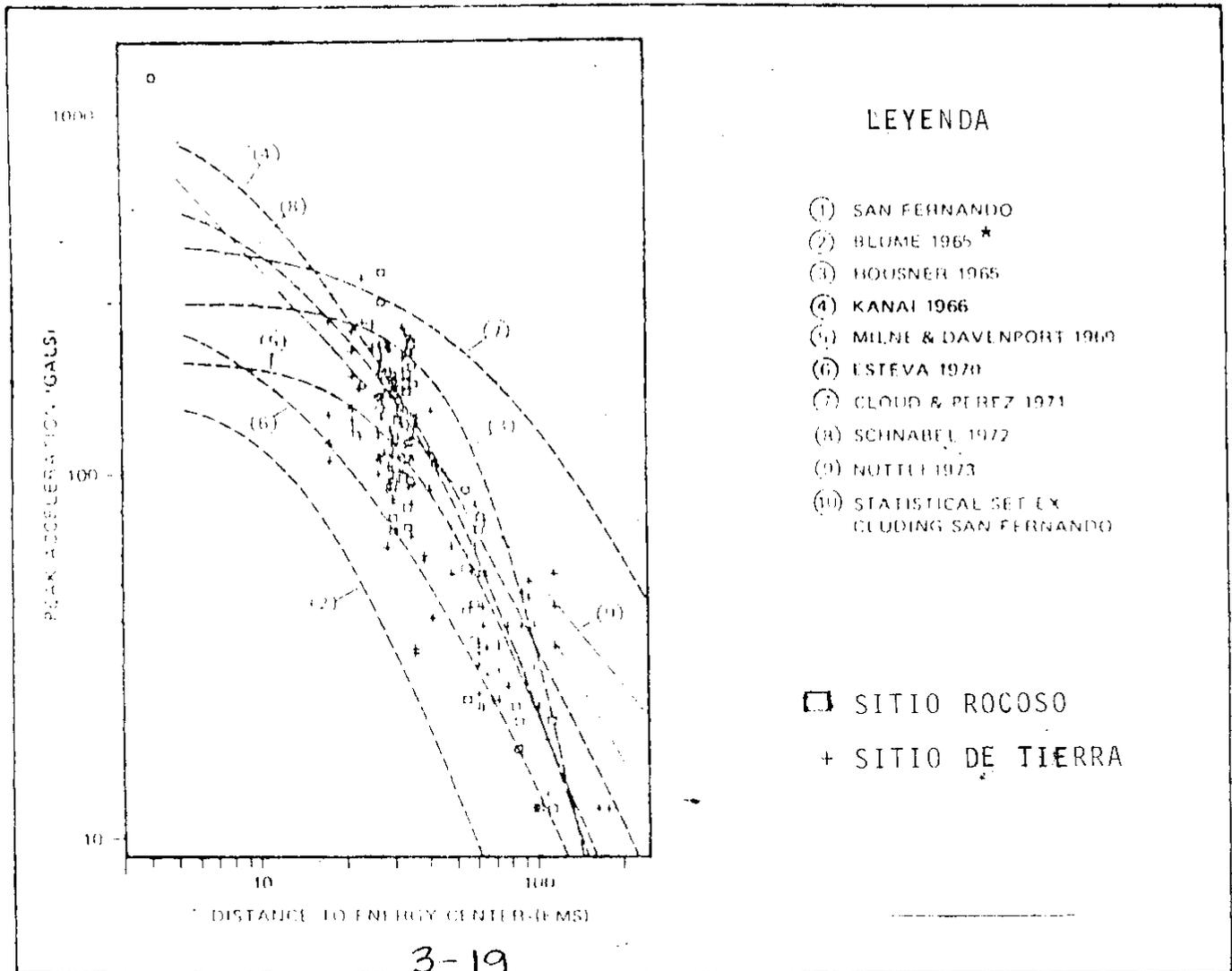


FIGURA 3-19 RELACIONES DE ATENUACION  
(Tomadas de Shah et al., 1975).

Esta relación puede proveer resultados que están muy próximos al comportamiento medio de datos si las características del suelo para la región son reconocidas.

El input de las características del suelo no fue usado en la preparación de esta figura de Shah et al., 1975.

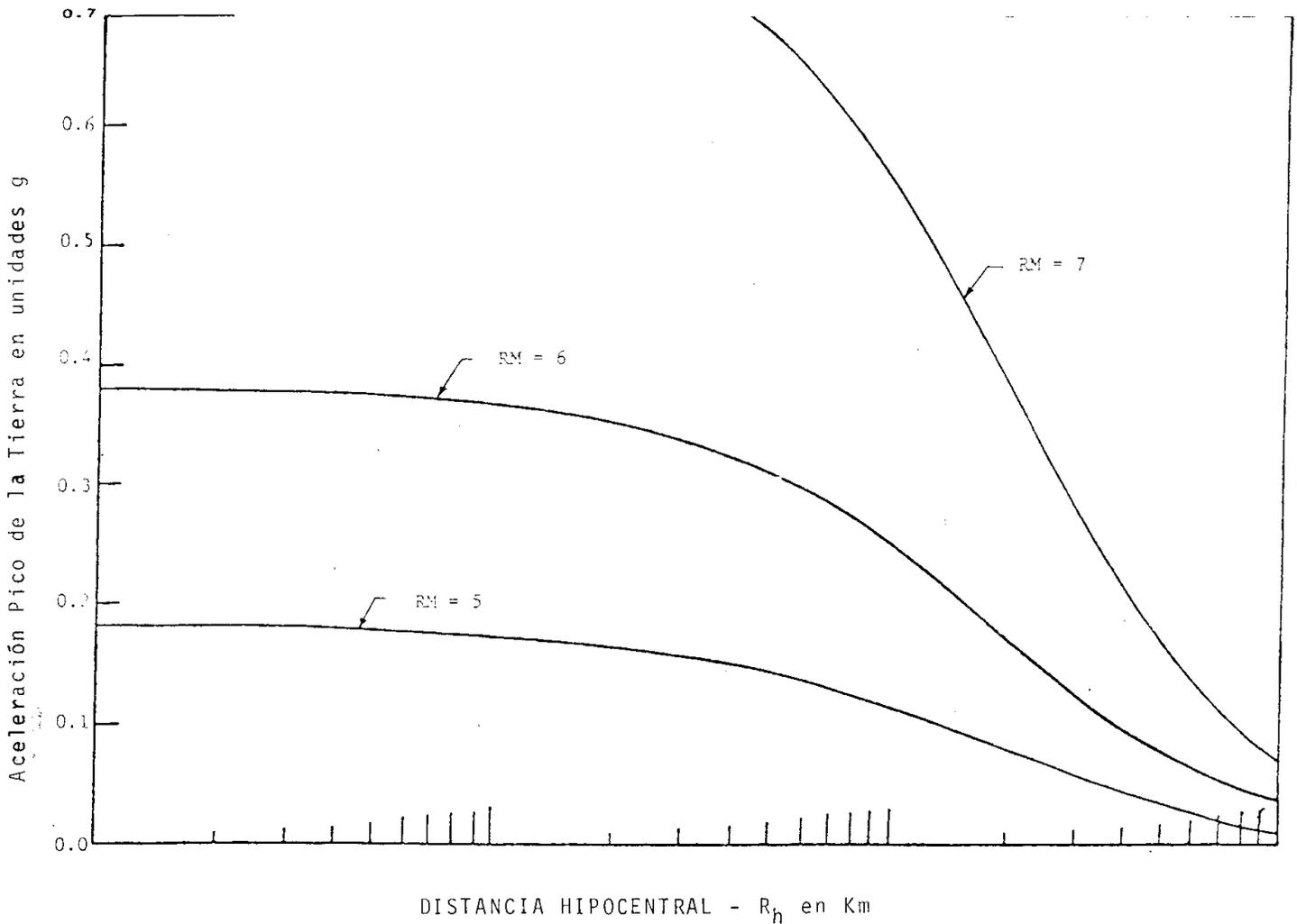


FIGURA A-1b Relación de Atenuación de Esteva 1973.

Tomado de "Seismic Hazard Mapping for Guatemala"

Kiremidjian, Shah y Lubertnik, (1977)

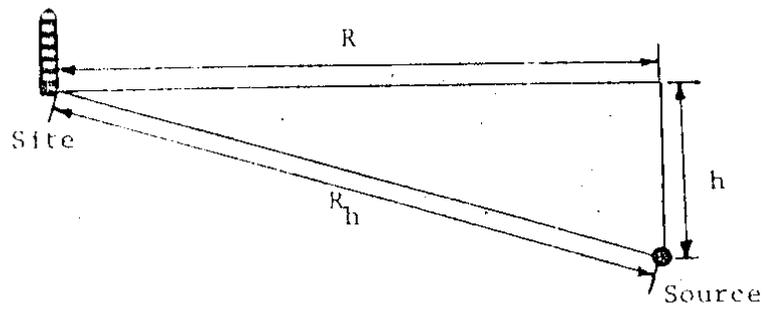
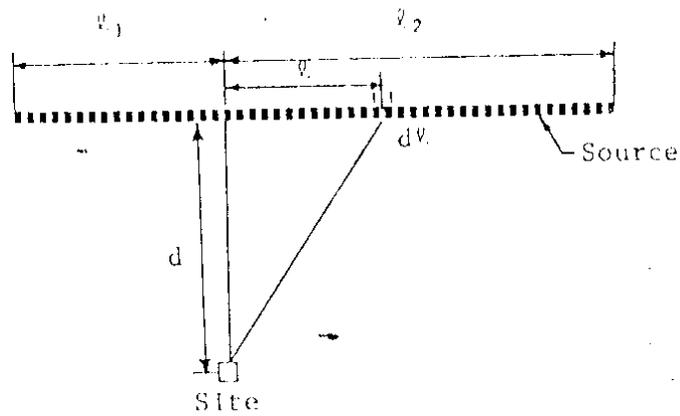
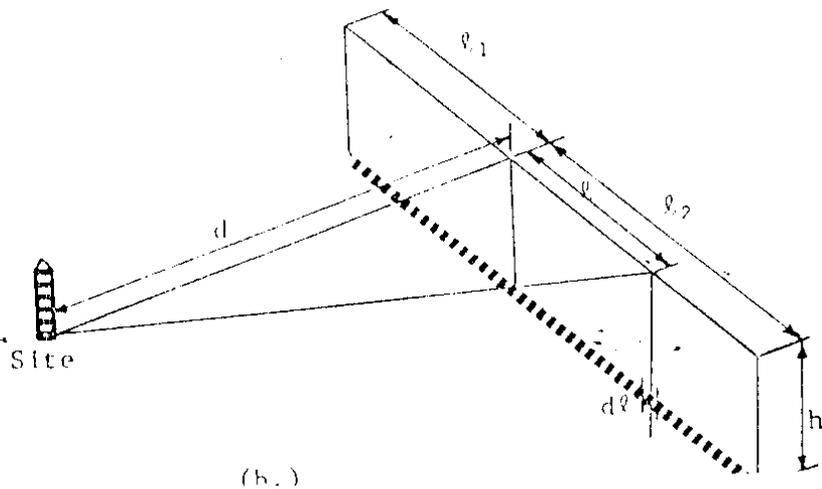


Figura 3-20 Fuente de punto: Vista de arriba.



(a.)



(b.)

Figura 3-21 Fuente de línea.

(a) Vista de arriba

(b) Vista Isométrica.

### 3.4.2 Fuente de punto.

La probabilidad de que al menos un evento sea mayor que  $m$  en un tiempo  $t$  de una fuente de punto tal como la que se muestra en la figura 3-19 y de acuerdo a (3-10) es:

$$P[M > m, t] = 1 - \exp[-N'(m)t] \quad (3-14)$$

Sustituyendo la relación de recurrencia dada por la ecuación (3-5) la distribución de probabilidad es:

$$P[M > m, t] = 1 - \exp[-\exp(\alpha' + \beta m)t] \quad (3-15)$$

donde  $\alpha'$ : constante de regresión normalizada.

Para determinar la distribución de probabilidad de la aceleración pico de la tierra  $a$ , se usa la relación de atenuación general (3-13) como se muestra a continuación, Kiremidjian et al (1977), Donovan (1974):

$$\begin{aligned} P[A > a, t] &= P\left[\frac{b_1 \exp(b_2 M)}{(R_h + b_4)^{b_3}} > a, t\right] \\ &= P\left[M > \ln\left[\frac{a}{b_1} [R_h + b_4]^{b_3}\right]^{1/b_2}, t\right] \end{aligned} \quad (3-16)$$

Sustituyendo la ecuación (3-15) para  $a$  &  $A$  tenemos:

$$P[A > a, t] = 1 - \exp \left[ -e^{\alpha'} \left[ \frac{a}{b_1} \right]^{\beta/b_2} [R_h + b_4]^{\beta b_3/b_2} \cdot t \right] \quad (3-17)$$

Se hace un cambio de variables, denotando:

$$\gamma = e^{\alpha'}$$

$$\delta = \beta/b_2$$

$$\rho = \beta b_3/b_2 = \delta b_3$$

y se obtiene finalmente:

$$P[A > a, t] = 1 - \exp \left[ -\gamma \left[ \frac{a}{b_1} \right]^{\delta} [R_h + b_4]^{\rho} \cdot t \right] \quad (3-18)$$

### 3.4.3 Fuente de línea.

En el caso usual de los epicentros que caen a lo largo de una falla, la fuente se puede dividir en  $k$  pequeños segmentos de longitud  $\Delta l_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Sea  $E\omega_i$  el evento "no ocurre ningún terremoto con una magnitud de Richter mayor que  $m$  sobre  $\Delta l_i$  en el tiempo  $t$ ."

Luego por la condición de Poisson sobre independencia espacial se verifica que:

$$P \left[ \sum_{i=1}^k E \ell_i \right] = \sum_{i=1}^k P [E \ell_i] \quad (3-19)$$

La probabilidad de tener un sismo de magnitud de Richter menor o igual que  $m$  debido a la fuente de línea completa es:

$$\begin{aligned} P [M < m, t] &= \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k P [E \ell_i] \\ &= \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \exp \left[ - \sum_{i=1}^k N'(m) \Delta \ell_i \cdot t \right] \\ &= \exp \left[ - \int_{l_1}^{l_2} N'(m) d\ell \cdot t \right] \end{aligned} \quad (3-20)$$

$$\text{donde } \Delta \ell = \max_{1 \leq i \leq k} \Delta \ell_i$$

Hay que recordar que la relación de recurrencia logarítmico-lineal es por (3-5)

$$\ln N'(m) = \alpha' + \beta M$$

donde  $N'(m)$  y  $\alpha'$  están normalizadas con respecto a la longitud de la fuente de línea y el período de tiempo de los datos. Sustituyendo  $N'(m)$  en la ecuación (3-20) se obtiene:

$$P[M \leq m, t] = \exp \left[ - \int_{\ell_1}^{\ell_2} \exp[\alpha' + \beta m] d\ell \cdot t \right] \quad (3-21)$$

Para obtener la probabilidad de tener una aceleración pico máxima de la tierra se usa una relación de atenuación como sigue:

$$\begin{aligned} P[A \leq a, t] &= P \left[ \frac{b_1 \exp(b_2 M)}{[R_h + b_4]^{b_3}} \leq a, t \right] \\ &= P \left[ M \leq \ln \left[ \frac{a}{b_1} \right]^{1/b_2} [R_h + b_4]^{b_3/b_2}, t \right] \\ &= \exp \left[ - e^{\alpha'} \left[ \frac{a}{b_1} \right]^{\beta/b_1} \int_{\ell_1}^{\ell_2} [R_h + b_4]^{\beta b_3/b_2} d\ell \cdot t \right] \quad (3-22) \end{aligned}$$

Denotando  $e^{\alpha'}$ ,  $\beta/b_1$   $\beta b_3/b_2$  por  $\gamma$ ,  $\delta$  y  $\rho$  respectivamente y observando de la geometría de la fuente de línea (Figura 3-21)

$$R_h = [d^2 + \ell^2 + h^2]^{1/2} \quad (3-23)$$

podemos escribir:

$$P[A \leq a, t] = \exp \left[ - \gamma \left[ \frac{a}{b_1} \right]^{\delta} t \int_{\ell_1}^{\ell_2} \left[ [d^2 + \ell^2 + h^2]^{1/2} + b_4 \right]^{\rho} \cdot d\ell \right] \quad (3-24)$$

alternativamente:

$$P[A > a, t] = 1 - \exp \left[ -\gamma \left[ \frac{a}{b_1} \right]^{\delta} t \int_{\ell_1}^{\ell_2} \left[ [d^2 + \ell^2 + h^2]^{1/2} + b_4 \right]^{\rho} d\ell \right]$$

Ejemplo Numérico:

1) Calcular  $P[A > a, t]$  para la fuente de línea del Motagua (S1) cuya profundidad focal es 33 Km (d) cuya longitud ( $\ell$ ) es  $4.84^\circ \cong 537.2$  Km y  $h=50$  Km. En este caso (d) se lee en Tabla 3-2, ( $\ell$ ) se lee en la tabla 3-3) y (h) se lee en la Tabla 3-1.

Dada la relación de Esteva (1973)

$$a = \frac{500 \exp(0.8M)}{(R_h + 40)^2}$$

al compararla con la forma general (3-13)

$$b_1 = 500 \quad b_2 = 0.8 \quad b_3 = 2 \quad b_4 = 40$$

Llamaremos éxito a aquel evento para el cual  $A > 0.2g$  y tomaremos como tiempo de exposición futura  $t = 10$  años.

Entonces lo que nos interesa calcular es  $P[A > 0.2g, 10]$

$$P[A > 0.2g, 10] = P\left[\frac{500 \exp(0.8M)}{(R_h + 40)^2} > a\right], t \text{ por (3-16)}$$

$$= P\left[M > \ln\left[\frac{0.2g}{500} [R_h + 40]^2\right]^{1/0.8}, t\right]$$

$$\text{pero } R_h = (d^2 + \ell^2 + h^2)^{1/2}$$

$$= (33^2 + 537^2 + 50^2)^{1/2}$$

$$= (1089 + 288369 + 2500)^{1/2}$$

$$= (291958)^{1/2} = 540.33 \text{ (Km)}$$

entonces por 3-25

$$P[A > 0.2g, 10] = 1 - \exp\left[-\gamma \left[\frac{0.2g}{500}\right]^\delta t_f^{\rho} \int_{\ell_1}^{\ell_2} [R_h + 40]^\rho d\ell\right]$$

$$\gamma = e^{\alpha'} \quad \delta = \beta/0.8 \quad \rho = 2\beta/0.8 = 2\delta$$

pero según la tabla 3-3 las constantes

$$\alpha' = -0.0632 \quad \beta = -0.7955$$

$$\therefore \gamma = 0.938 \quad \delta = -0.994 \quad \rho = 1.998$$

$$\begin{aligned}
P[A > 0.2g, 10] &= 1 - \exp \left[ -0.938 \left[ \frac{0.2g}{500} \right]^{-0.994} (10) \int_0^{4.84} [540.3 + 40]^{-1.998} d\ell \right] \\
&= 1 - \exp \left[ -0.938 \left[ \frac{1.96}{500} \right]^{-0.994} (10) \int_0^{4.84} [580.3]^{-1.998} d\ell \right] \\
&= 1 - \exp \left[ -0.938 [0.03]^{-0.994} (10) \int_0^{4.84} 0.000003 d\ell \right] \\
&= 1 - \exp \left[ -0.938 [0.03]^{-0.994} (10) (0.000003) \int_0^{4.84} d\ell \right] \\
&= 1 - \exp \left[ -0.938 [321.915] (10) (0.00003) (4.84) \right] \\
&= 1 - \exp \left[ -0.938 (3219.15) (0.00003) (4.84) \right] \\
&= 1 - \exp [-0.043] = 1 - 0.9579 = 0.0421
\end{aligned}$$

$$\therefore P[A > 0.2g, 10] = 4.21 \%$$

$$P[M > m, t] = 1 - \exp \left[ - \int_{\ell_1}^{\ell_2} \exp[\alpha' + \beta m] d\ell \cdot t \right] \text{ por (3-21)}$$

$$\begin{aligned}
P[M > 7.5, 10] &= 1 - \exp \left[ - \int_0^{4.84} \exp[-0.0632 + (-0.7955)7.5] d\ell \cdot 10 \right] \\
&= 1 - \exp \left[ - \int_0^{4.84} \exp[-6.02945] d\ell \cdot 10 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \exp \left[ - \exp(-6.02945) \int_0^{\ell} 4 \cdot 8^4 d\ell \cdot 10 \right] \\
 &= 1 - \exp[-.0024(48.4)] = 1 - \exp[-0.1162]
 \end{aligned}$$

$$P[M > 7.5, 10] = 1 - 0.8903 = 0.1097 = 10.97 \%$$

2) Calcular  $P[A > a, t]$  para la fuente de línea del Polochic (S2) cuya profundidad focal es 33 Km (d), la longitud ( $\ell$ ) es  $3.52^\circ \approx 390.7$  (Km) y (h) la profundidad hipocentral es 139 Km. En este caso (h) se lee en tabla 3-1, (d) en la tabla 3-2 y ( $\ell$ ) en la tabla 3-3 (valores aproximados).

De nuevo llamaremos éxito al evento para el cual  $[A] > .2g$  y tomaremos como tiempo de exposición futura  $t=10$  años. Debemos calcular  $P[A > 0.2g, 10]$

$$P[A > 0.2g, 10] = P \left[ \left[ \frac{500 \exp(0.8M)}{(R_h + 40)} \right], 10 \right] \text{ por (3-16)}$$

$$\text{pero } R_h = (d^2 + \ell^2 + h^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow (1089 + 152646.5 + 19321)^{1/2}$$

$$= (173056.2)^{1/2}$$

$$R_h = 416.00 \text{ (Km)}$$

Por (3-25)

$$P[A > 0.2g, 10] = P\left[M > \ln\left[\frac{0.2g}{500} [416+40]^2\right]^{1/0.8}, 10\right]$$

por (3-25)

$$P[A > 0.2g, 10] = 1 - \exp\left[-\gamma \left[\frac{0.2g}{500}\right]^\delta \int_{\ell_1}^{\ell_2} [416+40]^\rho d\ell\right]$$

$$\gamma = e^{\alpha'} \quad \delta = \beta/0.8 \quad \rho = 2\beta/0.8 = 2\delta$$

pero según la tabla 3-3

$$\alpha' = -0.4323 \quad \beta = -0.7961$$

$$\therefore \gamma = 0.649 \quad \delta = -0.995 \quad \rho = -1.990$$

sustituyendo estos valores:

$$\begin{aligned} P[A > 0.2g, 10] &= 1 - \exp\left[-0.649 \left[\frac{0.2g}{500}\right]^{-0.995} \int_0^{10} (10)^{3 \cdot 52} (456)^{-1.990} d\ell\right] \\ &= 1 - \exp\left[-0.649 \left[\frac{1.96}{500}\right]^{-0.995} \int_0^{10} (10)^{3 \cdot 52} (456)^{-1.990} d\ell\right] \\ &= 1 - \exp\left[-0.649 (0.003)^{-0.995} \int_0^{10} (10)^{3 \cdot 52} (0.000005) d\ell\right] \\ &= 1 - \exp\left[-0.649 (323.79) (10) (0.000005) \int_0^{10} d\ell\right] \end{aligned}$$

$$= 1 - \exp[-0.649(3237.90)(0.000005)(3.52)]$$

$$= 1 - \exp[-0.037] = 1 - 0.9636 = 0.0364$$

$$P[A > 0.2g, 10] = 3.64 \%$$

$P[M > 6.0, 10]$  para la fuente de línea del Polochic (S2) cuya profundidad focal ( $d$ ) es 33 Km y  $m = 6.0$

$$P[M > 6.0, 10] = 1 - \exp\left[-\int_0^{3.52} \exp[-0.4323 + (-0.7961)6.0] d\ell \cdot t\right] \quad (3-21)$$

$$P[M > 6.0, 10] = 1 - \exp\left[-\int_0^{3.52} \exp[-0.4323 + (-4.77)] d\ell \cdot 10\right]$$

$$= 1 - \exp\left[-\int_0^{3.52} \exp(-5.2023) d\ell \cdot 10\right]$$

$$= 1 - \exp\left[-\exp(-5.2023) \int_0^{3.52} d\ell \cdot 10\right]$$

$$= 1 - \exp[-0.0055(35.2)]$$

$$= 1 - \exp[-0.1936] =$$

\*

$$= 1 - 0.8240 = 0.176 = 17.6 \%$$

Como puede observarse, la probabilidad puede aumentar al bus-  
carse una aceleración mayor que una referencia aceleracional  
menor.

#### 3.4.4 Fuente de Area.

La función de distribución acumulada de la aceleración pico  
de la tierra debido a la fuente de área en un sitio, puede  
obtenerse de manera similar a aquella para la fuente de lí-  
nea. La figura 3-22 muestra esquemáticamente la geometría  
de la fuente de área.

Considere un elemento de área  $\Delta A_i = R_i \Delta R_i \Delta \theta_i$ . Sea  $E_{A_i}$  el even-  
to no ocurre ningún sismo sobre el elemento  $\Delta A_i$  que tuviere  
una magnitud de Richter mayor que  $m$  en un tiempo  $t$ . Luego,  
de nuevo por la condición de Poisson sobre la independencia  
espacial, se sigue que:

$$P \left[ \sum_{i=1}^k E_{A_i} \right] = \prod_{i=1}^k P [E_{A_i}] \quad (3-26)$$

Conforme  $\Delta A \rightarrow 0$ ,  $\Delta R$  y  $\Delta \theta$  ambos tienden a cero. La probabilidad  
de tener un sismo de magnitud Richter menor o igual que  $m$ ,  
debido a la fuente de área completa es entonces:

$$\begin{aligned}
P[M \leq m, t] &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \prod_{i=1}^k P[EA_i] \\
&= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \exp\left[-\sum_{i=1}^k N'(m) \Delta A_i t\right] \\
&= \exp\left[-\int_0^\theta \int_{R_1}^{R_2} N.(m) R dR \cdot d\theta \cdot t\right] \quad (3-27)
\end{aligned}$$

Tomado de "Seismic Hazard Mapping for Guatemala"  
Kiremidjian, Shah y Lubetnik (1977).

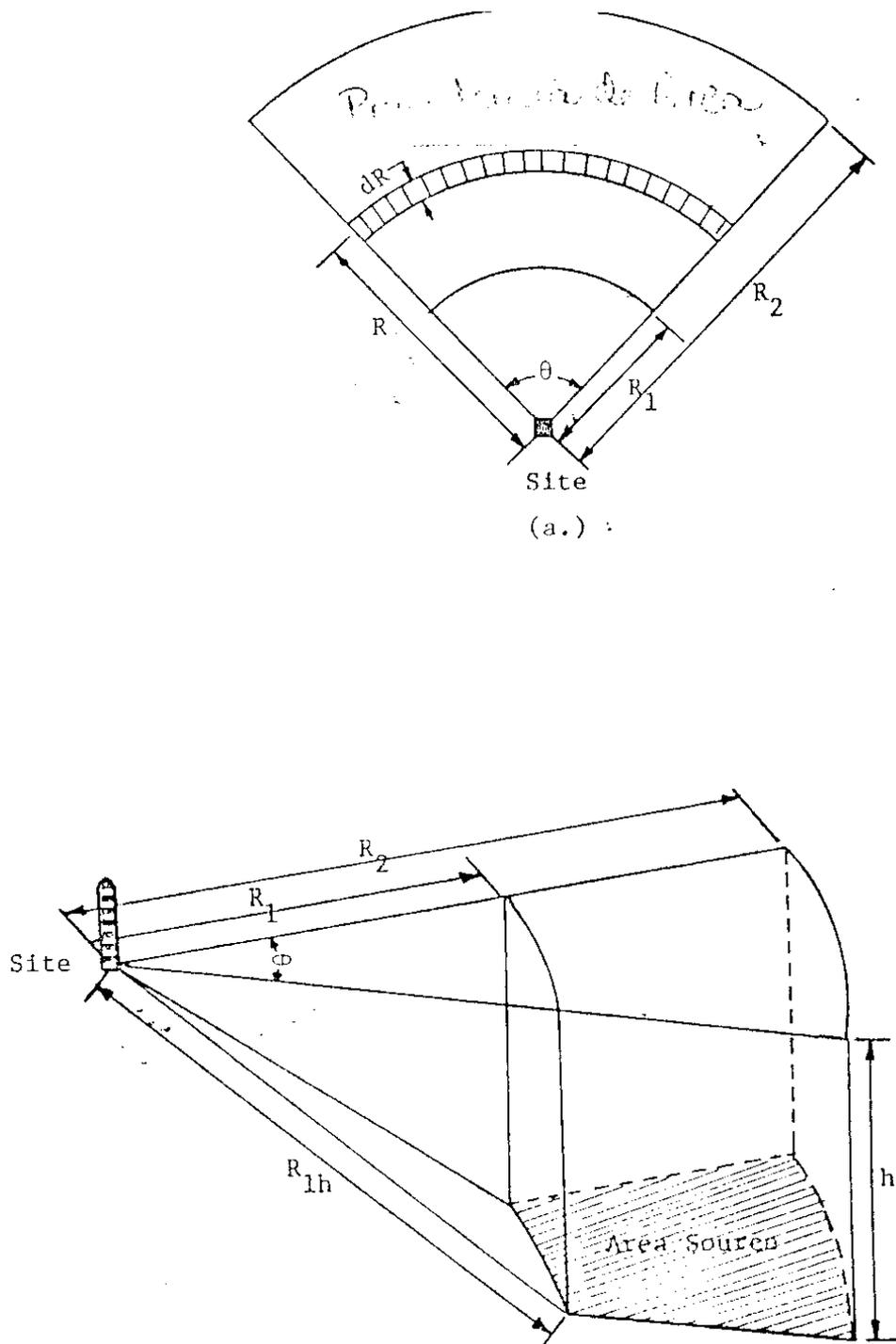


FIGURA 3-22 FUENTE DE AREA:  
(a) Vista de arriba. (b) Vista Isométrica.

Donde  $N'(m)$  es la razón media de ocurrencia para la fuente de área como lo define la ecuación (3-4).

Sustituyendo para  $N'(m)$  en la ecuación (3-27)

$$P[M \leq m, t] = \exp \left[ - \int_0^{\theta} \int_{R_1}^{R_2} \exp(\alpha' + \beta m) R dR d\theta \cdot t \right] \quad (3-28)$$

Usando la relación de atenuación de la ecuación (3-13)

$$\begin{aligned} P[A \leq a, t] &= P \left[ \frac{b_1 \exp(b_2 M)}{(R_h + b_4)^{b_3}} \leq a, t \right] \\ &= P \left[ M \leq \ln \left[ \frac{a}{b_1} \right]^{1/b_2} [R_h + b_4]^{b_3/b_2}, t \right] \end{aligned} \quad (3-29)$$

Esta ecuación es de la misma forma que la ecuación para la distribución sobre la magnitud de Richter (Ecuación (3-10)) y puede escribirse así:

$$\begin{aligned} P[A \leq a, t] &= \exp \left[ - e^{\alpha'} \left[ \frac{a}{b_1} \right]^{\beta/b_2} t \int_0^{\theta} d\theta \int_{R_1}^{R_2} [R^2 + h^2 + b_4]^{\beta b_3/b_2} R dR \right] \\ &= \exp \left[ - e^{\alpha'} \left[ \frac{a}{b_1} \right]^{\beta/b_2} t \theta \int_{R_1}^{R_2} [R^2 + h^2 + b_4]^{\beta b_3/b_2} R dR \right] \end{aligned} \quad (3-30)$$

$$\text{Sean } \gamma = e^{\alpha'}$$

$$\delta = \beta/b_2$$

$$\rho = \beta b_3/b_2 \quad \text{Como anteriormente}$$

$$R_h = \sqrt{R^2 + h^2} \quad \text{por proc. de triangulación} \quad (3-31)$$

Entonces:

$$P[A \leq a, t] = \exp \left[ -\gamma \left[ \frac{a}{b_1} \right]^{\delta} t \theta \int_{R_1}^{R_2} (R_h + b_4)^{\rho} R dR \right] \quad (3-32)$$

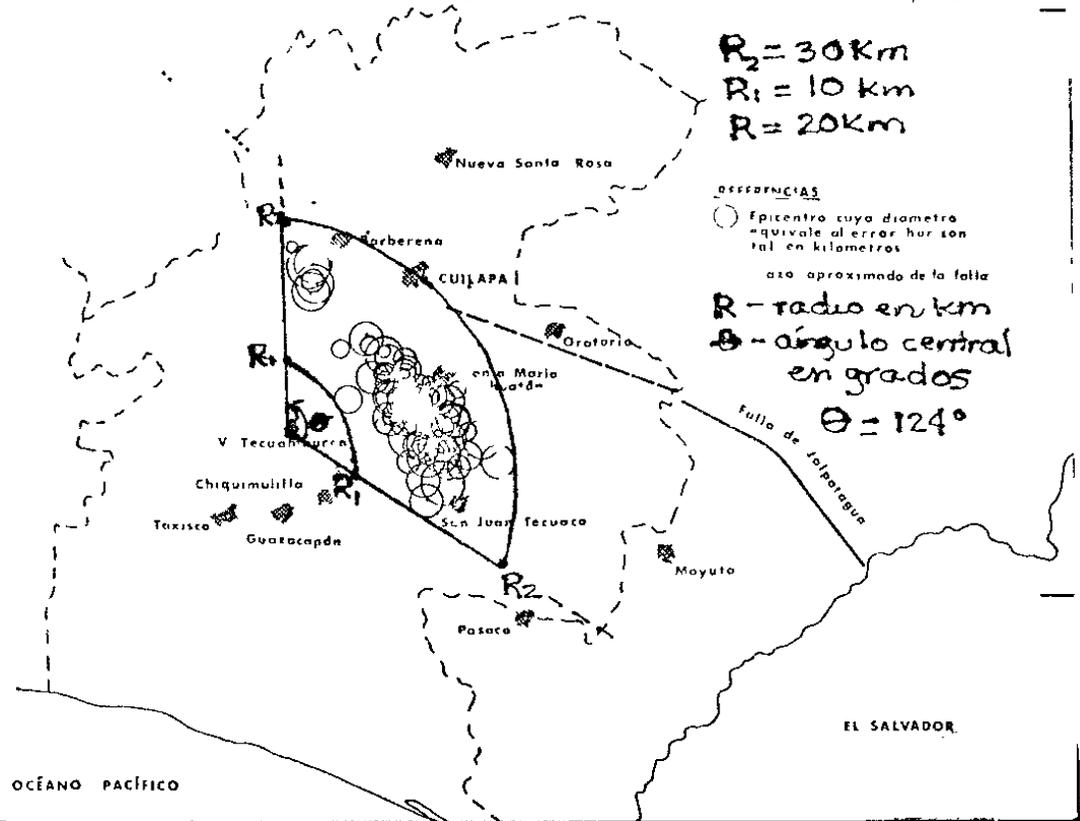
$$P[A > a, t] = 1 - \exp \left[ -\gamma \left[ \frac{a}{b_1} \right]^{\delta} t \theta \int_{R_1}^{R_2} (R_h + b_4)^{\rho} R dR \right] \quad (3-33)$$

Ejemplo para una fuente de área:

En el estudio de Kiremidjian et al (1977) no aparecen datos tabulados para fuente de área. Por esa razón, se desarrollará un ejemplo que está sucediendo actualmente en la región de Santa Rosa según lo informa El Gráfico del 6 de enero de 1980 en el artículo Santa Rosa: Severos daños por sismos (página 5) el cual a su vez muestra un mapa de los epicentros de los últimos sismos ocurridos en ese departamento en los últimos días.

Estos epicentros se pueden localizar a través de una fuente de área si se conoce el radio  $R$  y el ángulo  $\theta$  del sector circular, para poder calcular el área del círculo o bien el área del sector.

MAPA PRELIMINAR DE LOCALIZACION DE EPICENTROS EN EL DEPTO DE SANTA ROSA



SE APRECIA EN EL MAPA LA ACTIVIDAD SISMICA ocurrida en los ultimos dias en el departamento de Santa Rosa

Fig

FIGURA 3-23

De acuerdo a un mapa cartográfico  $R_2=30$  Km aproximadamente y  $R=20$  Km de donde  $R_1=10$  Km. En este caso  $R_1$  y  $R_2$  representan los límites dentro de los cuales están todos los epicentros.

El ángulo que corresponde al sector circular  $\theta$  en grados, es  $\theta=124^\circ$ . Entonces por (3-28)

$$\begin{aligned}
 P[M > m, t] &= 1 - \exp \left[ - \int_0^{\theta} \int_{R_1}^{R_2} \exp(\alpha' + \beta m) R dR \cdot d\theta \cdot t \right] \\
 &= 1 - \exp \left[ - \int_0^{1.24} \int_{10}^{30} \exp(\alpha' + \beta m) (20) dR d\theta \cdot t \right]
 \end{aligned}$$

Si se conocen las constantes normalizadas  $\alpha'$  y  $\beta$  para esta fuente de área en el departamento de Santa Rosa, es posible calcular esta probabilidad.

Por (3-33) se podría calcular  $P[A > a, t]$  para  $A = 0.2g$  y un tiempo de exposición futura  $t = 10$  años.

$$P[A > a, t] = 1 - \exp \left[ - \gamma \left[ \frac{a}{b_1} \right]^\delta t \theta \int_{R_1}^{R_2} (R_h + b_4)^\rho R dR \right]$$

$$\gamma = e^{\alpha'} \quad \delta = \beta / b_2 \quad \rho = \beta b_3 / b_2 \quad R_h = \sqrt{R^2 + h^2}$$

$h = 60$  Km al suroeste según dato del INSIVUMEH proporcionado al diario El Gráfico.

$$R_h = \sqrt{20^2 + 60^2} = \sqrt{400 + 3600} = \sqrt{4000} = 63.24 \text{ Km}$$

entonces;

$$P[A > 0.2g, 10] = 1 - \exp \left[ - \gamma \left[ \frac{0.2g}{500} \right]^\delta t \theta \int_{R_1}^{R_2} (63.24 + 40)^\rho R dR \right]$$

$$\begin{aligned}
&= 1-\exp\left[-\gamma\left[\frac{1.96}{500}\right]^\delta (10)(124)\int_{10}^{30}(103.24)^\rho(20)dR\right] \\
&= 1-\exp\left[-\gamma[0.003]^\delta 1240\int_{10}^{30}(103.24)^\rho(20)dR\right] \\
&= 1-\exp\left[-\gamma[0.003]^\delta 1240(103.24)^\rho(20)\int_{10}^{30}dR\right] \\
&= 1-\exp\left[-\gamma[0.003]^\delta 1240(103.24)^\rho(20)(20)\right]
\end{aligned}$$

donde  $\gamma = e^{\alpha'}$        $\delta = \beta/0.8$        $\rho = 2\beta/0.8 = 2\delta$

los cuales podrían calcularse conociendo los valores de las constantes normalizadas para la fuente de área de Santa Rosa  $\alpha'$  y  $\beta$  que se desconocen actualmente.

Este ejemplo pone de manifiesto, la necesidad urgente que hay en nuestro país de tener datos actualizados y continuos sobre la ocurrencia de eventos sísmicos.

### 3.5 Función Acumulativa de Distribución de la Aceleración Pico de la Tierra.

En general, un sitio puede estar rodeado por cualquiera o todos los tres tipos de fuentes discutidas en la sección 3.4.

Si hay:

NP fuentes puntuales

NL fuentes de línea

NA fuentes de área

la función de distribución acumulada de la aceleración pico pico de la tierra en un sitio dado está dada por:

$$\begin{aligned}
 P[A > a, t] = & 1 - \exp \left[ - \sum_{i=1}^{NP} \gamma_i \left[ \frac{a}{b_1} \right]^{\delta_i} t [R_{h_i} + b_4]^{\rho_i} \right. \\
 & - \sum_{j=1}^{NL} \gamma_j \left[ \frac{a}{b_1} \right]^{\delta_j} t \int_{l_{1j}}^{l_{2j}} \left[ [d_j^2 + l^2 + h_j^2]^{1/2} + b_4 \right]^{\rho_j} dl \\
 & \left. - \sum_{k=1}^{NA} \gamma_k \left[ \frac{a}{b_1} \right]^k t \theta_k \int_{R_{1k}}^{R_{2k}} [R_{h_k} + b_4]^{\rho_k} R dR \right] \quad (3-34)
 \end{aligned}$$

En la ecuación (3-34) la sumatoria sobre  $i$  es para todas las

fuentes de punto, aquella sobre  $j$  es para todas las fuentes de línea y sobre  $k$  es para todas las fuentes de área.

Como fue indicado en la sección 3.1 de este Capítulo, fueron formuladas 18 fuentes de línea para Guatemala. Cualquier parte del país, está afectada por estas fuentes, dependiendo además de la proximidad del sitio a la localización de la fuente.

No fue posible calcular (3-34) por no haber suficiente información sobre fuentes puntuales y fuentes de área para Guatemala.

## V. CONCLUSIONES

- 1) El modelo de Poisson es una aproximación de la distribución binomial.
- 2) La distribución de Poisson exige que el número de éxitos en  $n$  ensayos repetidos de Bernoulli con probabilidad de éxito  $p$  en cada ensayo, obedezca a una ley de probabilidad con parámetro  $\lambda = np$ .
- 3) El modelo de Poisson en tanto que es una distribución de probabilidad discreta, puede aplicarse como un modelo muy efectivo al cálculo de la probabilidad de ocurrencia de eventos sísmicos.
- 4) Existen tres tipos de fuentes para representar la sismicidad de una región: la fuente puntual, la fuente de línea y la fuente de área. Para Guatemala son especialmente importantes las fuentes de línea.
- 5) El modelo de Poisson se puede aplicar a eventos sísmicos cuando el número de eventos es grande y la probabilidad de que ocurra un evento en un sitio determinado para cualquiera de los tres tipos de fuentes mencionados, es muy pequeña; en tanto que el producto de ellos es de magnitud moderada.
- 6) Los parámetros utilizados más comunmente para representar la mayor o menor severidad de los sísmicos son: la

Escala de Intensidad Modificada de Mercalli, la Escala de Magnitudes de Richter, y la Aceleración Pico de la Superficie de la Tierra.

- 7) Las relaciones de recurrencia dan el número medio de eventos sísmicos de magnitud mayor que alguna dada en términos de la fuente del sismo y el período de tiempo de los datos.
- 8) Los sismos son eventos espacial y temporalmente independientes.
- 9) Los principios de predicción probabilística son esenciales para el análisis de riesgo sísmico.
- 10) Conociendo los registros de amplitudes y acelerogramas es posible ajustar la relación de atenuación específica y determinar las constantes para Guatemala.
- 11) Es necesario completar los registros de datos sísmicos para las fuentes puntuales y las fuentes de área; con el objeto de conocer con mayor precisión el riesgo sísmico en Guatemala.

## VI. BIBLIOGRAFIA

- Boore D. Scientific American. E.E.U.U. 237(6): 69-78  
1977
- Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Applications. New York, John Wiley & Sons Inc.  
1957
- Halmos P. Measure Theory. New York, Van Nostrand.  
1950
- Kiremidjian A.; Shah H.; Lubetkin L.; Seismic Hazard Mapping for Guatemala. Stanford University California, The John A. Blume Earthquake Engineering Center.  
1977
- Lipschutz S. Probability. (Shaum's Series) New York, St. Louis, San Francisco, Mc-Graw Hill.  
1968
- Parzeu E. Modern Probability Theory and its Applications. Canada, John Wiley & Sons Inc.  
1960
- Tucker H. An Introduction to Probability and Mathematical Statistics. New York, Mc-Graw Hill.  
1962
- Wolf F. Elements of Probability and Statistics. New York, Mc-Graw Hill.  
1967

/smbg.